

X

**THÈSE**  
**présentée pour l'obtention du diplôme de**  
**DOCTEUR**  
**DE**  
**L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES**

**Spécialité : Structures et Matériaux**

**présentée par :**

**Seddiq HASSANI**

**Sujet de la thèse :**

**VALIDATION ET FORMULATION VARIATIONNELLE  
D'UNE LOI DE COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE  
NON LINEAIRE EN GRANDES DEFORMATIONS**

Soutenue, le 31 Octobre 1997  
devant le jury composé de :

Président :	<b>C. HUET</b>
Rapporteurs :	<b>D. BAPTISTE A. MILLARD</b>
Examineurs :	<b>K. DANG VAN A. EHRLACHER A. ALAOU SOULIMANI</b>



# Remerciements

Ce travail a été réalisé au Centre d'Enseignement et de Recherche en Analyse des Matériaux de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées sous la direction de monsieur A. Ehrlacher que je remercie pour m'avoir accueilli dans son laboratoire. Il a suivi avec intérêt l'évolution de ce travail et m'a permis de le mener à bien.

Qu'il me soit permis de remercier madame A. Alaoui Soulimani qui m'a accompagné tout au long de cette étude. Je rends en particulier hommage à son enthousiasme, sa grande disponibilité, sa patience et sa rigueur scientifique.

Je tiens à exprimer ma gratitude à monsieur C. Huet pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Mes remerciements vont aussi à messieurs D. Baptiste et A. Millard qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de ce travail ainsi qu'à monsieur K. Dang Van qui a bien voulu le juger. Leurs pertinentes remarques seront très utiles pour les travaux ultérieurs sur le sujet.

I. Laalāi a joué un rôle particulier dans la programmation du code de calcul. Qu'il trouve ici l'expression de mes sincères remerciements.

Merci à tous les membres du C.E.R.A.M. pour les discussions, sérieuses ou non, qui font de la vie d'un thésard ce qu'elle est. Ils ont tous su me soutenir pendant les moments difficiles que j'ai pu avoir et me faire profiter de leurs connaissances et leur bonne humeur.

Enfin, j'ai une pensée particulière pour mes parents, ma famille et mes amis qui m'ont soutenu pendant ces trois années.





# Résumé

On développe un modèle viscoélastique non linéaire en grandes déformations, appelé modèle pseudo-linéaire. Ce modèle est basé sur un choix particulier d'une mesure de déformation permettant d'écrire le potentiel d'énergie libre sous forme quadratique et la loi de comportement sous forme d'une convolution simple. Afin de valider ce modèle, on compare le potentiel pseudo-linéaire à un potentiel d'énergie libre écrit sous la forme générale d'un développement de Fréchet d'ordre 4. Les fonctions de relaxation de ce potentiel sont écrites sous forme d'exponentielles décroissantes à un temps caractéristique par décade. Cette comparaison montre une bonne concordance entre les deux descriptions. La formulation proposée permet de calculer simplement la dissipation dans le matériau. Une illustration est donnée dans le cas d'oscillations harmoniques. On développe alors une formulation variationnelle associée au modèle pseudo-linéaire basée sur la minimisation de l'énergie totale. On effectue une approximation linéaire en temps et on propose une procédure numérique de résolution. On construit alors un code de calcul par éléments finis et on le valide dans le cas de comportements simples en comparant les solutions analytiques aux résultats numériques.

# Abstract

We develop a large strain nonlinear viscoelastic model, called pseudo-linear model. It is based on the choice of a suitable strain tensor which permits to write the Helmholtz free energy as a quadratic form and the constitutive equation as a single convolution equation. To validate this model, we compare the pseudo-linear potential with a general Helmholtz free energy approximated by a fourth order multiple integral expansion. The memory functions are chosen in exponential form with one characteristic time by decade. This comparison shows that the two models are in good agreements. The proposed model can easily evaluate the dissipation function of the material. This is illustrated in the case of harmonic vibrations. Then, we develop a variational formulation based on the the total energy minimum principle. A numerical integration procedure using the finite element method is proposed, based on a linear approximation in the time domain. The comparison between the numerical results and the theoretical predictions are in good agreements for common behaviours.

## **Mots-clés**

Viscoélasticité, hyperélasticité, grandes déformations, dissipation, formulation variationnelle, méthode des éléments finis.

# Table des matières

Introduction	1
<b>0 Rappels et notations</b>	<b>3</b>
0.1 Description d'un système en mouvement . . . . .	4
0.1.1 Description lagrangienne . . . . .	5
0.1.2 Description eulérienne . . . . .	5
0.1.3 Déformations . . . . .	5
0.1.4 Contraintes . . . . .	8
0.1.5 Grandeurs objectives . . . . .	9
0.1.6 Loi de comportement isotherme . . . . .	10
0.2 Inégalité de Clausius-Duhem . . . . .	11
<b>I Synthèse bibliographique</b>	<b>13</b>
Introduction	15
<b>1 Approche fonctionnelle</b>	<b>16</b>
1.1 Viscoélasticité linéaire finie . . . . .	16
1.2 Le modèle de Bernstein, Kearsley et Zapas (BKZ) . . . . .	21
1.2.1 Solide incompressible . . . . .	21
1.2.2 Fluides incompressibles . . . . .	22
1.2.3 Identification expérimentale . . . . .	23
1.2.4 Limitations . . . . .	24
1.3 Viscoélasticité d'ordre supérieur . . . . .	24
1.3.1 Viscoélasticité d'ordre 2 . . . . .	24
1.3.2 Viscoélasticité d'ordre 3 . . . . .	25
1.4 Extension du principe de Boltzmann . . . . .	26
1.4.1 Le modèle de Leaderman . . . . .	26
1.4.2 Le temps réduit de Schapery . . . . .	27
1.5 Le modèle de Christensen . . . . .	30
1.5.1 Hypothèses du modèle . . . . .	30

1.5.2	Loi de comportement . . . . .	30
1.6	Conclusion . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Approche par variables d'état</b>	<b>34</b>
2.1	Les modèles rhéologiques . . . . .	34
2.1.1	Le modèle de Maxwell . . . . .	35
2.1.2	Le modèle de Burger généralisé . . . . .	36
2.1.3	Conclusion . . . . .	37
2.2	Le modèle de Weber . . . . .	38
2.3	Le modèle de Sidoroff . . . . .	39
2.4	Viscoélasticité tridimensionnelle . . . . .	41
2.4.1	Théorie linéaire . . . . .	42
2.4.2	Extension au cas non linéaire . . . . .	42
2.5	Le modèle viscohyperélastique . . . . .	44
2.5.1	Le modèle linéaire de Maxwell généralisé pour les solides . . . . .	44
2.5.2	Le modèle viscohyperélastique . . . . .	45
2.6	Le modèle à cinq paramètres . . . . .	47
2.6.1	Le modèle à trois paramètres . . . . .	47
2.6.2	Identification expérimentale . . . . .	48
2.6.3	Le modèle à cinq paramètres . . . . .	49
2.6.4	Limitations . . . . .	50
2.7	Conclusion . . . . .	50
	<b>Conclusion de la première partie</b>	<b>51</b>
<b>II</b>	<b>Le modèle pseudo-linéaire</b>	<b>53</b>
	<b>Introduction</b>	<b>55</b>
	<b>Motivation</b>	<b>56</b>
<b>1</b>	<b>Formulation générale et identification</b>	<b>59</b>
1.1	Introduction . . . . .	59
1.2	Potentiel d'énergie libre . . . . .	59
1.3	Tenseur de contrainte . . . . .	60
1.4	Lois de comportement . . . . .	60
1.5	Forme générale de la mesure de déformation . . . . .	62
1.6	Identification du tenseur de relaxation . . . . .	64
1.7	Identification de la mesure linéarisante . . . . .	64
1.8	Résolution du système ( $\mathcal{S}$ ) . . . . .	65

<b>2</b>	<b>Matériaux isotropes</b>	<b>70</b>
2.1	Introduction . . . . .	70
2.2	Choix du tenseur de relaxation . . . . .	70
2.3	Lois de comportement . . . . .	71
2.4	Mesure de déformation et identification . . . . .	71
2.5	Mesures de Seth . . . . .	74
2.6	Liaison avec l'hyperélasticité . . . . .	77
2.6.1	Exemples de potentiels hyperélastiques . . . . .	77
2.6.2	Linéarisation hyperélastique . . . . .	79
2.6.3	Linéarisation viscoélastique . . . . .	80
2.7	Conclusion . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Validation</b>	<b>82</b>
3.1	Introduction . . . . .	82
3.2	Potentiel et contrainte de Fréchet . . . . .	82
3.2.1	Potentiel de Fréchet . . . . .	82
3.2.2	Contrainte de Fréchet et puissance dissipée . . . . .	84
3.3	Linéarisation et identification . . . . .	86
3.3.1	Fonctions de relaxation . . . . .	86
3.3.2	Potentiel et contrainte pseudo-linéaires . . . . .	89
3.3.3	Mesure linéarisante . . . . .	92
3.4	Calage du modèle . . . . .	92
3.4.1	Introduction . . . . .	92
3.4.2	Forme des fonctions de relaxation . . . . .	93
3.4.3	Choix du nombre de temps caractéristiques par décade . . . . .	93
3.4.4	Choix de la base de temps caractéristiques . . . . .	96
3.4.5	Choix des coefficients des fonctions mémoire . . . . .	98
3.5	Simulations . . . . .	98
3.5.1	Choix des chargements à imposer . . . . .	98
3.5.2	Etude du chargement G . . . . .	100
<b>4</b>	<b>Etude thermodynamique</b>	<b>103</b>
4.1	Oscillations en extension simple . . . . .	103
4.2	Oscillations hors équilibre . . . . .	107
4.3	Oscillations en cisaillement . . . . .	108
	<b>Conclusion de la deuxième partie</b>	<b>109</b>
<b>III</b>	<b>Formulations variationnelles</b>	<b>113</b>
	<b>Introduction</b>	<b>115</b>

<b>1</b>	<b>Cas de la viscoélasticité linéaire</b>	<b>116</b>
1.1	Définitions et position du problème . . . . .	116
1.2	Principe variationnel en espace temporel . . . . .	118
1.3	Principe variationnel en espace transformé . . . . .	121
1.4	Méthode du Hamiltonien généralisé . . . . .	122
1.5	Autres formes d'équations de champs . . . . .	124
1.6	Généralisation selon Huet . . . . .	125
1.7	Discussion . . . . .	129
<b>2</b>	<b>Cas de l'hyperélasticité</b>	<b>130</b>
2.1	Position du problème . . . . .	130
2.2	Méthode du lagrangien augmenté . . . . .	130
2.2.1	Principe de la méthode . . . . .	130
2.2.2	Formulation lagrangienne augmentée . . . . .	132
2.2.3	Algorithme de détermination de point-selle . . . . .	133
2.3	Application à l'hyperélasticité . . . . .	135
2.3.1	Formulation faible . . . . .	135
2.3.2	Formulation lagrangienne augmentée . . . . .	138
2.4	Discussion . . . . .	140
2.5	Application au modèle pseudo-linéaire . . . . .	141
2.5.1	Description de la transformée de Laplace-Carson à $n$ variables	141
2.5.2	Cas du modèle pseudo-linéaire . . . . .	143
<b>3</b>	<b>Formulation proposée</b>	<b>146</b>
3.1	Lois de comportement . . . . .	146
3.2	Formulation faible . . . . .	147
3.3	Formulation lagrangienne . . . . .	147
3.4	Le problème en déplacements . . . . .	151
3.4.1	Approximations . . . . .	152
3.4.2	Expression de la fonctionnelle $\mathcal{L}$ à l'instant $t + \Delta t$ . . . . .	153
3.4.3	Stationnarité de la fonctionnelle . . . . .	160
3.5	Discretisation par éléments finis . . . . .	160
3.5.1	Description des ensembles discrets . . . . .	160
3.5.2	Expression du problème discrétisé . . . . .	161
3.5.3	Discretisation du terme $\int_{\Omega_0} \left\{ \left( \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}}(t) : \underline{\underline{\beta}} \right) : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^* \right\} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{v}}}^* dx$	163
3.5.4	Discretisation du terme $\int_{\Omega_0} \left\{ \underline{\underline{\mathbf{A}}}(t) : \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{v}}}^* \right\} dx$ . . . . .	165
3.5.5	Discretisation du terme $\int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{\underline{\mathbf{f}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}^* dx$ . . . . .	166
3.5.6	Discretisation du terme $\int_{\partial\Omega_\sigma} \underline{\underline{\mathbf{g}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}^* da$ . . . . .	166
3.5.7	Discretisation du problème global . . . . .	167

3.5.8	Algorithme de résolution . . . . .	169
<b>4</b>	<b>Exemples d'application</b>	<b>170</b>
4.1	Compression HPP . . . . .	171
4.1.1	Solution analytique . . . . .	171
4.1.2	Solution numérique . . . . .	172
4.2	Compression hyperélastique . . . . .	174
4.2.1	Solution analytique . . . . .	175
4.2.2	Solution numérique à l'équilibre . . . . .	178
4.3	Compression viscoélastique avec glissement (sans frettage) . . . . .	179
4.3.1	Premier cas . . . . .	180
4.3.2	Second cas . . . . .	181
4.4	Compression à sections constantes (avec frettage) . . . . .	183
4.5	Chargement induisant du cisaillement . . . . .	186
	<b>Conclusion de la troisième partie</b>	<b>188</b>
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>188</b>
	<b>Annexes</b>	<b>191</b>
A	Détermination de $I_4$	195
B	Coefficients des fonctions mémoire	196
B.1	Un temps caractéristique par décade . . . . .	196
B.2	Deux temps caractéristiques par décade . . . . .	196
B.3	Trois temps caractéristiques par décade . . . . .	197
C	Chargements A à I	198
D	Matrice de rigidité élémentaire	203
E	Matrice élémentaire de force	208
E.1	Terme faisant intervenir la mémoire . . . . .	208
E.2	Terme de force volumique . . . . .	209
E.3	Matrice de force élémentaire . . . . .	210
	<b>Bibliographie</b>	<b>211</b>





# Table des figures

<b>Chapitre 0</b>	<b>ix</b>
0.1 Force élémentaire . . . . .	8
 <b>Partie I</b>	 <b>12</b>
1.1 Comparaison entre fonctions de fluage et de relaxation pour différents niveaux de contrainte [Ward, 1985] . . . . .	27
2.1 Modèle rhéologique de Maxwell . . . . .	35
2.2 Fluage et relaxation pour un matériau de Maxwell . . . . .	36
2.3 Modèle rhéologique de Burger . . . . .	36
2.4 Fluage et relaxation pour un matériau de Burger . . . . .	37
2.5 Cas particuliers du modèle de Burger . . . . .	38
2.6 Configuration intermédiaire . . . . .	40
2.7 Modèle linéaire de Maxwell généralisé . . . . .	44
2.8 Déformation imposée discrète et continue . . . . .	45
2.9 Modèle non linéaire de Maxwell . . . . .	46
2.10 Eléments hyperélastiques unidimensionnels . . . . .	47
2.11 Le modèle à trois paramètres pour les solides . . . . .	47
2.12 Essai de torsion d'un cylindre . . . . .	48
2.13 Le modèle à cinq paramètres . . . . .	49
 <b>Partie II</b>	 <b>51</b>
3.1 Erreur sur le potentiel: choix du nombre de temps caractéristiques par décade . . . . .	95
3.2 Erreur sur le potentiel: choix de la base de temps caractéristiques	96
3.3 Erreur sur le potentiel pour un temps caractéristique par spectre	97
3.4 Différentes directions de chargement . . . . .	99
3.5 Contrainte de Piola-Kirchhoff 2 et erreur sur le potentiel de Fréchet pour le chargement G . . . . .	101
3.6 Comparaison entre les potentiels de Fréchet d'ordre 2 et 4 . . . . .	101

4.1	Comparaison de la phase entre la déformation de Green-Lagrange et la contrainte de Piola-Kirchhoff . . . . .	104
4.2	Variations de la contrainte de Piola-Kirchhoff en fonction de la déformation de Green-Lagrange . . . . .	105
4.3	Variations de la puissance dissipée et du taux de dissipation en fonction du temps . . . . .	106
4.4	Variations de l'énergie dissipée en fonction du temps pour des oscillations en traction . . . . .	106
4.5	Variations de la contrainte de Piola-Kirchhoff $\Pi_{11}$ en fonction de la déformation de Green-Lagrange $\Delta_{11}$ (cas hors équilibre) . . . .	107
4.6	Variations de l'énergie dissipée en fonction du temps pour des oscillations en traction autour d'une elongation hors équilibre . . . .	108
4.7	Variations de la contrainte de Piola-Kirchhoff en fonction de la déformation de Green-Lagrange $\Delta_{12}$ . . . . .	110
4.8	Variations de la contrainte de Piola-Kirchhoff en fonction de la déformation de Green-Lagrange $\Delta_{22}$ . . . . .	110
4.9	Variations de la puissance dissipée et du taux de dissipation en fonction du temps . . . . .	111
4.10	Variations de l'énergie dissipée en fonction du temps pour des oscillations en cisaillement . . . . .	111

## Partie III 112

1.1	Identité triangulaire [Huet, 1992] . . . . .	126
2.1	Matériau dans sa configuration de référence soumis à des forces de volume et de surface . . . . .	131
3.1	Approximation linéaire par morceaux de la déformation . . . . .	158
3.2	Élément fini utilisé [Ruas, 1981] . . . . .	161
3.3	Élément de référence . . . . .	162
4.1	Déplacement horizontal imposé sur le bord droit . . . . .	170
4.2	Conditions de sollicitation d'un cylindre en compression . . . . .	171
4.3	Contrainte uniaxiale homogène pour un chargement quasi-instantané	173
4.4	Contrainte uniaxiale homogène pour un chargement lent . . . . .	173
4.5	Champs de contrainte et de déplacement pour un essai en petites déformations . . . . .	175
4.6	Contrainte uniaxiale et elongation homogènes pour un comportement hyperélastique . . . . .	178
4.7	Mailles où sont calculées les contraintes pour la représentation graphique . . . . .	179

4.8	Evolution de la contrainte pour un comportement viscoélastique avec: $\underline{\underline{\mathbb{E}}} = \underline{\underline{\Delta}}, \Delta t = 1 \text{ sec.}, t_c = 10 \text{ sec.}$ . . . . .	180
4.9	Champs de contrainte et de déplacement pour un cylindre en compression avec glissement (sans frettage) . . . . .	181
4.10	Evolution de la contrainte pour un comportement viscoélastique avec: $\underline{\underline{\mathbb{E}}} = a_0 \underline{\underline{1}} + a_1 \underline{\underline{\Delta}}, \Delta t = 1 \text{ sec.}, t_c = 10 \text{ sec.}$ . . . . .	182
4.11	Champs de contrainte et de déplacement pour un cylindre viscoélastique en compression avec glissement . . . . .	183
4.12	Conditions de sollicitation d'un cylindre en compression à section constante . . . . .	184
4.13	Champs de contrainte et de déplacement pour une compression à section constante . . . . .	185
4.14	Conditions de sollicitation d'un cylindre en cisaillement . . . . .	186
4.15	Déplacement vertical imposé sur le bord droit . . . . .	186
4.16	Champs de déplacement pour un cylindre en «pseudo-cisaillement»	187

## Annexe C

197

C.1	Chargement A: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel . . . . .	199
C.2	Chargement B: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel . . . . .	199
C.3	Chargement C: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel . . . . .	200
C.4	Chargement D: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel . . . . .	200
C.5	Chargement E: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel . . . . .	201
C.6	Chargement F: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel . . . . .	201
C.7	Chargement H: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel . . . . .	202
C.8	Chargement I: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel	202



# Liste des tableaux

<b>Chapitre 0</b>	<b>ix</b>
0.1 Objectivité des grandeurs physiques décrivant un système . . . . .	9
 <b>Partie II</b>	 <b>51</b>
3.1 Potentiel de Fréchet . . . . .	83
3.2 Contrainte de Fréchet . . . . .	84
3.3 Puissance dissipée . . . . .	85
3.4 Différents types de chargements simulés . . . . .	100
 <b>Partie III</b>	 <b>112</b>
2.1 Algorithme 1 . . . . .	133
2.2 Algorithme 2 . . . . .	135
2.3 Lois de comportement hyperélastiques . . . . .	135
2.4 Formulations faibles . . . . .	136
2.5 Formulations faibles finales . . . . .	137
2.6 Définition des espaces de résolution . . . . .	138
2.7 Problème variationnel à résoudre . . . . .	139
2.8 Algorithme 3 . . . . .	140
 3.1 Lois de comportement . . . . .	147
3.2 Problème variationnel à résoudre . . . . .	149
3.3 Problème discrétisé global . . . . .	167



# Notations

## Grandeurs physiques

Grandeurs	Signification
$\theta$	Température
$\chi_i$	Variables internes
$I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta$	Invariants de $\underline{\underline{\Delta}}$
$I_1^C, I_2^C, I_3^C$	Invariants de $\underline{\underline{C}}$
$p$	Pression hydrostatique
$\rho$	Masse volumique dans la configuration actuelle
$\rho_0$	Masse volumique dans la configuration de référence
$\lambda$	Elongation
$\Phi, D$	Dissipation
$\Psi, W$	Potentiels d'énergie libre
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$	Fonctionnelle de l'histoire de déformation
$t, \tau$	Variables temporelles
$\tau_i$	Temps caractéristiques
$\Omega$	Élément de volume dans la configuration actuelle
$\Omega_0$	Élément de volume dans la configuration de référence
$\partial\Omega_u$	Partie de $\Omega$ sur laquelle les déplacements sont imposés
$\partial\Omega_\sigma$	Partie de $\Omega$ sur laquelle les contraintes sont imposées
$\kappa_t$	Configuration actuelle
$\kappa_0$	Configuration de référence
$\mathcal{U}$	Energie interne
$S$	Entropie
$s$	Entropie spécifique
$\mathcal{C}$	Energie cinétique totale
$\mathcal{P}_e$	Puissance des efforts extérieurs
$\mathcal{P}_c$	Puissance calorifique
$\mathcal{P}$	Puissance dissipée
$J$	Déterminant de $\mathbb{F}$

## Grandeurs tensorielles et vectorielles

Tenseurs	Signification
$\underline{\underline{F}}$	Gradient de déformation
$\underline{\underline{F}}^e$	Gradient de déformation élastique
$\underline{\underline{C}}$	Tenseur de Cauchy-Green droit
$\underline{\underline{B}}$	Tenseur de Cauchy-Green gauche
$\underline{\underline{G}}$	$\frac{1}{2}(\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{1}})$
$\underline{\underline{U}}$	Tenseur d'extension droit
$\underline{\underline{V}}$	Tenseur d'extension gauche
$\underline{\underline{R}}$	Rotation
$\underline{\underline{D}}$	Tenseur taux de déformation
$\underline{\underline{D}}^a$	Tenseur taux de déformation anélastique
$\underline{\underline{L}}$	Tenseur vitesse de déformation ou gradient de vitesse eulérien
$\underline{\underline{\omega}}$	Partie antisymétrique du gradient de vitesse eulérien
$\underline{\underline{\Delta}}$	Tenseur de déformation de Green-Lagrange
$\underline{\underline{\Pi}}$	Tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff 2 symétrique
$\underline{\underline{K}}$	Tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff 1 non symétrique
$\underline{\underline{E}}$	Mesure de déformation linéarisante
$\underline{\underline{S}}$	Tenseur de contrainte associé à $\underline{\underline{E}}$
$\underline{\underline{R}}$	Tenseur de relaxation d'ordre 4
$\underline{\underline{J}}$	Tenseur de fluage d'ordre 4
$\underline{\underline{e}}$	Tenseur de déformation linéarisée
$\underline{\underline{e}}$	Déviateur du tenseur de déformation linéarisée
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur de contrainte de Cauchy
$\underline{\underline{s}}$	Déviateur du tenseur de contrainte de Cauchy
$\underline{\underline{I}}$	Tenseur métrique d'ordre 2
$\underline{\underline{1}}$	Tenseur unité d'ordre 2
$\underline{\underline{1}}$	Tenseur unité d'ordre 4
$\underline{\underline{T}}$	Tenseur des temps caractéristiques
$\underline{\underline{M}}$	Tenseur adjoint du gradient de déformation
$\underline{\underline{\kappa}}$	Matrice de rigidité



Vecteurs	Signification
$\underline{x}(X)$	Vecteur position dans la configuration actuelle (de référence)
$\underline{q}$	Vecteur flux de chaleur
$\underline{h}$	Flux de chaleur dans la configuration de référence
$\underline{n}$	Vecteur normal extérieur
$\underline{g}$	Vecteur contrainte surfacique
$\underline{f}$	Vecteur contrainte volumique
$\underline{u}$	Vecteur déplacement
$\langle \underline{N} \rangle$	Fonction de forme
$\underline{U}^e$	Déplacement nodal horizontal
$\underline{V}^e$	Déplacement nodal vertical
$\underline{u}(U)$	Vecteur vitesse eulérienne (lagrangienne)
$\underline{\nabla}_X(\underline{\nabla}_x)$	Gradient lagrangien (eulérien)

## Symboles et conventions

Symboles	Signification
$\underline{\underline{(\cdot)}}$	Tenseur d'ordre 4
$\underline{\underline{(\cdot)}}$	Tenseur d'ordre 2
$\underline{(\cdot)}$	Vecteur
$DEV(dev)$	Déviateur dans la configuration de référence (actuelle)
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial(\cdot)}$	Dérivée partielle par rapport à un argument
$\partial\phi$	Sous-différentiel de $\phi$
$(\cdot) \cdot (\cdot)$	Simple contraction
$(\cdot) : (\cdot)$	Double contraction
$(\cdot) \otimes (\cdot)$	Produit tensoriel
${}^tX$	Transposée du tenseur $X$
$\dot{X}$	Dérivée temporelle de $X$
$x_{i,j}$	Dérivée spatiale de $x$
$\oplus$	Somme directe



# Introduction

Les élastomères thermoplastiques et thermodurcissables sont très largement utilisés dans l'automobile, la chimie, le bâtiment, la câblerie et les adhésifs. L'origine de ce succès provient des caractéristiques mécaniques des polymères qui leur permettent d'avoir une tenue correcte en température, une bonne tenue au frottement et aux chocs et de bonnes propriétés acoustiques (absorption de bruits et isolation phonique). Du point de vue mécanique, le comportement des polymères varie entre le comportement solide vitreux et le comportement fluide visqueux en fonction des conditions de chargement (température, temps, fréquence de chargement). C'est pour cette raison que les polymères sont considérés comme des matériaux viscoélastiques, terme qui exprime la variation du comportement entre l'état solide élastique et l'état fluide visqueux.

La température qui caractérise le comportement des polymères est appelée température de transition vitreuse. Aux basses températures (ou aux hautes fréquences), le comportement est de type élastique fragile (ou vitreux) avec un module d'Young de quelques GPa et une elongation à rupture de quelques pour-cent. Aux hautes températures (ou basses fréquences), le comportement des polymères est de type caoutchoutique avec un module d'Young de quelques MPa et une elongation à rupture de quelques centaines de pour-cent. Pour des températures encore plus élevées, une déformation permanente apparaît sous le chargement et le polymère se comporte comme un fluide visqueux. Autour de la température de transition vitreuse, le comportement du matériau est très instable (ni vitreux, ni caoutchoutique) et aucun équilibre thermodynamique ne peut être écrit. Le matériau a alors un module intermédiaire et peut dissiper une énergie considérable.

La dépendance vis-à-vis du temps provient du fait que les polymères s'oxydent au contact de la lumière. C'est pour cette raison qu'ils sont dits vieillissants et, dans ce cas, leur comportement est très différent. Toutefois, pour remédier à cet inconvénient, on ajoute, lors de la fabrication des élastomères, par exemple, des dérivés phénoliques ou des dérivés aminés.

Si l'on s'intéresse à ces matériaux à l'état solide et en les supposant non vieillissants, comme c'est le cas dans ce travail, les polymères sont sujets à de grandes déformations (puisque l'elongation à rupture est de quelques centaines de pour-

cent) et ont un comportement non linéaire. De plus, ils se caractérisent par une forte dissipation visqueuse et une faible conductivité thermique qui engendre une importante variation de température qui modifie fortement les caractéristiques mécaniques.

La difficulté de l'étude de ces matériaux réside dans l'interaction entre la dépendance en temps et la non linéarité. La plupart des études faites dans ce domaine, telles que [Coleman & Noll, 1961a], [Coleman & Noll, 1961b], [Bernstein *et al.*, 1963], ne prennent pas en compte cette interaction. D'autres considèrent le comportement viscoélastique comme un comportement hyperélastique modifié. Ainsi, Johnson [Johnson *et al.*, 1991<sub>a</sub>], [Johnson *et al.*, 1991<sub>b</sub>], [Johnson *et al.*, 1991<sub>c</sub>] a modélisé la viscoélasticité par la superposition de l'hyperélasticité et de la viscohyperélasticité ainsi que par un modèle de Maxwell linéaire où tous les éléments sont hyperélastiques. L'inconvénient de ce type d'approche est qu'elle ne permet pas de tenir compte de l'énergie dissipée.

L'objectif de ce travail est d'écrire une loi de comportement qui rende compte des caractéristiques des polymères et d'en faire un outil numérique adapté au calcul de structures. Pour être compatible avec le comportement des polymères, cette loi de comportement doit être écrite en grandes déformations non linéaires en permettant le calcul, à chaque instant, de l'énergie dissipée du matériau.

Après un chapitre où l'on récapitule les principales notions de mécanique nécessaires dans la suite du travail, la première partie de cette thèse fait l'inventaire des différents modèles viscoélastiques selon deux catégories. La première recense les modèles par approche fonctionnelle tels que [Coleman & Noll, 1961b], [Pipkin, 1964], [Bernstein *et al.*, 1963] alors que la seconde énumère les modèles par approche par variables d'état tels que [Mandel, 1977], [Sidoroff, 1974]. L'approche fonctionnelle consiste à écrire la contrainte comme une fonctionnelle de la déformation alors que l'approche par variables d'état suppose que la contrainte ne dépend pas de l'histoire de la déformation mais de la valeur actuelle d'un certain nombre de variables dites variables d'état.

Après avoir montré les limites des précédents modèles, essentiellement liées à l'identification des paramètres qui les définissent, on développe, dans la deuxième partie, le modèle proposé (appelé modèle pseudo-linéaire) en définissant les méthodes d'identification des paramètres du modèle. Ainsi, on suppose l'existence d'une mesure de déformation qui permette d'écrire le potentiel d'énergie libre sous forme quadratique. Cette formulation a l'avantage de limiter à 2 l'ordre du potentiel, la non linéarité étant incluse dans la mesure de déformation que l'on choisit comme fonction tensorielle isotrope du tenseur de déformation de Green-Lagrange. Au cours de cette partie, on effectue une validation du modèle en comparant le potentiel pseudo-linéaire à celui écrit sous forme d'un développement de Fréchet d'ordre 4. Par la suite, on montre comment il permet de calculer, à chaque instant, l'énergie dissipée par le matériau.

Enfin, la troisième partie explore, dans un premier temps, différentes voies possibles d'établissement et de résolution d'une formulation variationnelle associée à cette loi de comportement. Parmi ces voies, deux ont retenu notre attention: celle liée à la viscoélasticité linéaire en petites déformations (résolue *via* la transformée de Laplace-Carson) et celle liée à l'hyperélasticité (résolue par la méthode du lagrangien augmenté). Ces deux méthodes nous ont alors donné l'idée d'appliquer la transformation de Laplace-Carson aux équations d'équilibre et aux lois de comportement du modèle pseudo-linéaire afin de nous ramener à un problème hyperélastique susceptible d'être résolu par la méthode du lagrangien augmenté. Cette voie a montré ces limites et nous a contraint à écrire une formulation variationnelle en espace et en temps mais dont le déplacement est la seule inconnue. A partir de cette formulation, nous avons développé un schéma numérique de résolution en utilisant des mailles particulières et en nous limitant au cas axisymétrique. Cette partie se termine par un certain nombre d'exemples de problèmes résolus numériquement et comparés, quand cela est possible, aux solutions analytiques.



# Rappels et notations

En guise de préambule, nous proposons de faire quelques rappels basiques de la mécanique des milieux continus afin d'introduire certaines notations qui vont nous servir dans ce travail. Ainsi, après avoir défini les différentes descriptions (lagrangienne et eulérienne), nous allons étudier les déformations et les contraintes. La définition des déformations va nous amener à introduire le tenseur gradient de transformation et, par conséquent, la notion de transport convectif qui permet de passer d'une description à l'autre. Nous introduisons par la suite la notion de force puis celle de contrainte afin de déboucher sur les lois de comportement permettant de lier les contraintes aux déformations. Nous rappelons enfin l'inégalité de Clausius-Duhem qui permet d'établir la cohérence physique d'un système ou d'un modèle.

## 0.1 Description d'un système en mouvement

♡ **Définition 0.1** [Salençon, 1989] *On appelle configuration actuelle d'un système  $S$ , la configuration  $\kappa_t$  correspondant à l'instant courant  $t$ . Les variables indépendantes sont donc la position actuelle  $\underline{x}$  de la particule  $X$  et le temps  $t$ .*

*On appelle configuration de référence du système  $S$ , la configuration particulière  $\kappa_{t_0}$  du système à un instant  $t_0$  fixé. En général, on pose  $t_0 = 0$  et la configuration de référence est alors appelée configuration initiale et notée  $\kappa_0$ . Les variables indépendantes sont donc la position de référence  $\underline{X}$  de la particule  $X$  et le temps  $t$ . Il convient de préciser que le choix de la configuration de référence est arbitraire.*

*On appelle configuration naturelle du système  $S$ , la configuration où les variables indépendantes sont la particule  $X$  elle-même et le temps  $t$ . Néanmoins, cette configuration est rarement utilisée en mécanique des milieux continus. En revanche, elle s'avère très utile dans certaines applications de la méthode des éléments finis.*

Un point matériel  $M$  est repéré par ses coordonnées, par rapport à un repère orthonormé,  $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$  dans  $\kappa_0$  et  $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$  dans  $\kappa_t$ . Tous les repérages des différentes configurations se feront dans un référentiel galiléen noté  $\mathcal{R}$ .

### 0.1.1 Description lagrangienne

#### ◇ Définition

La description lagrangienne du mouvement d'un corps déformable dans le référentiel  $\mathcal{R}$  consiste à se donner à chaque instant l'expression du vecteur position  $\underline{x}$  de la particule située en  $\underline{X}$  dans  $\kappa_0$ :

$$.1 \quad \underline{x} = \phi(\underline{X}, t)$$

où  $\phi$  est une fonction continue et continûment dérivable.

#### ◇ Vitesse d'une particule

La vitesse de la particule dans  $\mathcal{R}$  identifiée par sa position dans  $\kappa_0$  est le vecteur  $\underline{U}(\underline{X}, t)$  défini par:

$$.2 \quad \underline{U}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} = \frac{\partial \phi(\underline{X}, t)}{\partial t}$$

### 0.1.2 Description eulérienne

La description eulérienne du mouvement d'un corps déformable dans le référentiel  $\mathcal{R}$  consiste à se donner à chaque instant l'expression du vecteur vitesse  $\underline{u}$  de la particule dans  $\kappa_t$ :

$$.3 \quad \underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, t)$$

### 0.1.3 Déformations

#### ◇ Gradient de transformation

On définit le gradient  $\underline{\mathbb{F}}$  de la transformation  $\phi : \kappa_0 \mapsto \kappa_t$  par:

$$.4 \quad \underline{\mathbb{F}} = \frac{\partial \phi(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}} = \underline{\nabla}_{\underline{X}} \phi(\underline{X}, t)$$

$\phi$  admettant une application réciproque, on en déduit que  $\underline{\mathbb{F}}$  n'est jamais singulière. Son déterminant  $J$  (appelé dilatation volumique) ne pouvant être nul, il est de signe constant:

$$.5 \quad J = \det \underline{\mathbb{F}} \quad , \quad J > 0$$

On peut donc effectuer la décomposition polaire de  $\underline{\mathbb{F}}$ :

$$.6 \quad \underline{\mathbb{F}} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{V}} \cdot \underline{\mathbf{R}}$$

où  $\underline{\mathbf{R}}$  est la rotation de la matière et  $\underline{\mathbf{U}}$  et  $\underline{\mathbf{V}}$  les tenseurs de dilatation droit et gauche respectivement.



◇ **Déformations en représentation lagrangienne**

1. Tenseur des dilatations

On définit le tenseur de second ordre  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ , tenseur des dilatations entre les configurations  $\kappa_0$  et  $\kappa_t$ , appelé tenseur des dilatations de Cauchy<sup>1</sup>, par:

$$.7 \quad \underline{\underline{\mathbb{C}}} = {}^t\mathbb{F} \cdot \mathbb{F}$$

C'est un tenseur symétrique défini positif. Il est le tenseur de base pour la représentation lagrangienne du comportement.

2. Tenseur des déformations de Green-Lagrange

On définit le tenseur des déformations de Green-Lagrange entre les configurations  $\kappa_0$  et  $\kappa_t$  par le tenseur symétrique d'ordre 2,  $\underline{\underline{\Delta}}$ :

$$.8 \quad \underline{\underline{\Delta}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbb{C}}} - \underline{\underline{\mathbb{1}}})$$

Il a l'avantage, par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit, d'être nul en l'absence de déformation.

3. Tenseur gradient lagrangien du champ de vitesse

Il est défini par:

$$.9 \quad \underline{\underline{\dot{\mathbb{F}}}} = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{\underline{\mathbf{X}}}} U(\underline{\underline{\mathbf{X}}}, t)$$

4. Tenseur taux de déformation lagrangien

Il est défini comme la dérivée par rapport au temps du tenseur des dilatations:

$$.10 \quad \underline{\underline{\dot{\Delta}}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\dot{\mathbb{C}}}} = \frac{1}{2} \left( {}^t\dot{\underline{\underline{\mathbb{F}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{F}}} + {}^t\underline{\underline{\mathbb{F}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbb{F}}}} \right)$$

---

1. Cette appellation correspond à la terminologie française (Germain, Salençon). Dans la terminologie anglo-saxonne, ce tenseur est appelé tenseur de Cauchy-Green droit pour le différentiel du tenseur de Cauchy-Green gauche  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}$ . Etant donné que dans la bibliographie ces deux tenseurs sont utilisés, nous utiliserons, dans la suite, la terminologie anglo-saxonne

◇ **Déformations en représentation eulérienne**

1. Tenseur des dilatations

On définit le tenseur de second ordre  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}$ , tenseur eulérien des dilatations, appelé tenseur de Cauchy-Green gauche, par:

$$.11 \quad \underline{\underline{\mathbb{B}}} = \underline{\underline{\mathbb{F}}} \cdot {}^t\underline{\underline{\mathbb{F}}}$$

2. Tenseur gradient eulérien de vitesse

Il est défini par:

$$.12 \quad \underline{\underline{\mathbb{L}}} = \dot{\underline{\underline{\mathbb{F}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-1}$$

3. Tenseur taux de déformation eulérien

Il s'agit de la partie symétrique du gradient par rapport à  $\underline{\mathbf{x}}$  de la vitesse  $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t)$ :

$$.13 \quad \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{\mathbf{x}}} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t) + {}^t\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{\mathbf{x}}} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t) \right) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbb{L}}} + {}^t\underline{\underline{\mathbb{L}}})$$

$$\text{car } \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{\mathbf{x}}} \underline{\mathbf{u}} = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{\mathbf{X}}} \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-1}.$$

C'est un tenseur eulérien. La partie antisymétrique du gradient de vitesse eulérien est appelée tenseur taux de rotation et notée  $\underline{\underline{\omega}}$ :

$$.14 \quad \underline{\underline{\omega}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{\mathbf{x}}} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t) - {}^t\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{\mathbf{x}}} \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}, t) \right) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbb{L}}} - {}^t\underline{\underline{\mathbb{L}}})$$

◇ **Transport convectif**

Le transport convectif d'une grandeur (vecteur, tenseur, élément de surface, élément de volume ...) consiste à suivre cette grandeur dans le mouvement de déformation homogène lorsque  $t$  varie.

1. Transport d'un vecteur

$$.15 \quad d\underline{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\mathbb{F}}}(\underline{\mathbf{X}}, t) d\underline{\mathbf{X}}$$

2. Transport d'un volume

Si  $d\Omega$  est un élément de volume dans la configuration actuelle et  $d\Omega_0$  le même élément dans la configuration de référence, alors:

$$.16 \quad d\Omega = J(\underline{\mathbf{X}}, t) d\Omega_0$$

## 3. Transport d'une surface orientée

Soit  $d\Gamma$  et  $d\Gamma_0$  deux éléments de surface dans  $\kappa_t$  et  $\kappa_0$  respectivement:

$$.17 \quad d\Gamma = J(\underline{\mathbf{X}}, t) {}^t\mathbb{F}^{-1}(\underline{\mathbf{X}}, t) d\Gamma_0$$

## 4. Transport du tenseur taux de déformation

Les tenseurs taux de déformation eulérien  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}$  et lagrangien  $\underline{\underline{\dot{\Delta}}}$  sont liés par:

$$.18 \quad \underline{\underline{\mathbb{D}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = {}^t\mathbb{F}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\underline{\mathbf{X}}, t) \cdot \mathbb{F}^{-1}$$

## 0.1.4 Contraintes

## ◇ Description eulérienne

Si on note par  $\underline{\mathbf{g}}$  le vecteur contrainte s'appliquant sur un élément de surface  $d\Gamma$  de normale extérieure  $\underline{\mathbf{n}}$  dans la configuration actuelle  $\kappa_t$  (figure 0.1), on peut définir le tenseur eulérien des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  par:

$$.19 \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} d\Gamma = \underline{\mathbf{g}} d\Gamma$$

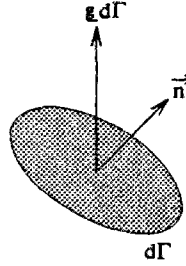


FIG. 0.1 - Force élémentaire

## ◇ Description lagrangienne

Le tenseur lagrangien des contraintes, qui est le transporté du tenseur des contraintes de Cauchy, est appelé tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 2 et est noté  $\underline{\underline{\Pi}}$ . Il est défini par:

$$.20 \quad \underline{\underline{\Pi}} = J\mathbb{F}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot {}^t\mathbb{F}^{-1}$$

$\underline{\underline{\Pi}}$  est le tenseur énergétiquement associé à  $\underline{\underline{\dot{\Delta}}}$  puisque la puissance de déformation est:

$$.21 \quad \mathcal{P}_{déf} = \int_{\kappa_0} \underline{\underline{\Pi}} : \underline{\underline{\dot{\Delta}}} d\Omega_0 = \int_{\kappa_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\mathbb{D}}} d\Omega$$

### 0.1.5 Grandeurs objectives

♥ **Définition 0.2** [Germain & Muller, 1986] Une grandeur est dite objective si elle est invariante par changement du référentiel dans lequel on observe le mouvement.

Nous avons réuni dans le tableau ci-dessous (TAB. 0.1) les principales grandeurs en précisant si elles étaient objectives ou non.

Grandeur ou opérateur	Symbole	Objectivité
Vitesse	$\underline{u}$	NON
Tenseur de Cauchy-Green	$\underline{\underline{C}}$	NON <sup>a</sup>
Tenseur de Green-Lagrange	$\underline{\underline{\Delta}}$	NON <sup>b</sup>
Tenseur gradient de transformation	$\underline{\underline{F}}$	NON
Tenseur taux de déformation	$\underline{\underline{D}}$	OUI
Tenseur taux de rotation	$\underline{\underline{\omega}}$	NON
Contrainte de Cauchy	$\underline{\underline{\sigma}}$	OUI
Dérivée particulaire	$\frac{d}{dt}$	NON

TAB. 0.1 - Objectivité des grandeurs physiques décrivant un système

<sup>a</sup> En fait, ce sont les composantes du tenseur qui sont objectives

<sup>b</sup> Même remarque que pour le tenseur de Cauchy-Green

La dérivée particulaire, qui est la dérivée par rapport au temps d'une grandeur définie sur un ensemble de particules que l'on suit dans son mouvement [Germain & Muller, 1986], définissant un taux de variation par rapport à un observateur de la grandeur que l'on suit dans son mouvement n'est pas un opérateur objectif. C'est pour cette raison que l'on introduit un opérateur objectif, la dérivée de Jaumann, défini par:

$$.22 \quad \frac{d_J}{dt}(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot) - \underline{\underline{\omega}} \cdot (\cdot)$$

On peut définir d'autres opérateurs différentiels objectifs. Par exemple, la dérivée convective

$$.23 \quad \frac{d_c}{dt}(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot) - \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{x}} \cdot (\cdot)$$

est un opérateur objectif.

Une autre dérivée objective est celle introduite par Truesdell [Truesdell & Noll, 1965] et qu'il définit par:

$$.24 \quad \frac{d_T}{dt}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - \underline{\underline{L}} \cdot (\cdot) - (\cdot) \cdot {}^t \underline{\underline{L}}$$

où  $\underline{\underline{L}}$  est le gradient de vitesse défini par la relation (.12).

### 0.1.6 Loi de comportement isotherme

Dans ce paragraphe, nous introduisons la loi reliant le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff 2 au tenseur de déformation de Green-Lagrange. L'obtention d'une telle loi est basée sur un certain nombre de principes que nous développons dans ce qui suit. Le travail proposé dans cette thèse est développé pour un matériau isotherme. C'est pourquoi nous nous plaçons dans ce cas pour l'établissement de la loi de comportement.

#### ♡ Définition 0.3 Principe de causalité

*L'histoire du tenseur de contrainte actuelle ne dépend que de l'histoire des positions actuelles et éventuellement de leur histoire passée, soit:*

$$.25 \quad x_X^t = x \left( X, \begin{matrix} t \\ \tau \\ -\infty \end{matrix} \right) : \text{histoire des positions de } X$$

$$\chi^t = \{x_{X_0}^t | \forall X_0 \in \mathcal{C}\}, \quad \mathcal{C} : \text{corps des points matériels } X$$

Le principe de causalité implique donc que la contrainte actuelle est une fonctionnelle du point matériel  $X$ , de l'instant actuel  $t$  et de  $\chi^t$ :

$$.26 \quad \underline{\Pi}(X, t) = \Phi_{\text{réf}}(X, t; \chi^t)$$

#### ♡ Définition 0.4 Principe de l'action locale (théorie des gradients)

*Seuls les points situés à « proximité » de  $X$  influent sur la contrainte au point  $X$ . Donc, au lieu de retenir  $\chi^t$ , on ne retient que le développement en gradients successifs:*

$$.27 \quad \underline{\Pi}(X, t) = \Phi_{\text{réf}} \left( X, t; \underline{\nabla} \phi \left( X, \begin{matrix} t \\ \tau \\ -\infty \end{matrix} \right), \underline{\nabla}^2 \phi \left( X, \begin{matrix} t \\ \tau \\ -\infty \end{matrix} \right), \dots \right)$$

#### ♡ Définition 0.5 Principe de simplicité matérielle [Noll, 1958] (théorie du premier gradient)

*La transformation  $\phi$  n'intervient que par son premier gradient  $\underline{\mathbb{F}}$ , l'influence des autres gradients étant négligeable.*

$$.28 \quad \underline{\Pi}(X, t) = \Phi_{\text{réf}} \left( X, t; \underline{\mathbb{F}} \left( X, \begin{matrix} t \\ \tau \\ -\infty \end{matrix} \right) \right)$$

#### ♡ Définition 0.6 Principe d'objectivité

*La contrainte doit être invariante par changement du référentiel dans lequel on observe le mouvement.*

Cela a deux conséquences sur l'écriture de la loi comportement:

- Changement d'origine des temps:  $t$  ne peut être un argument directement de  $\Phi_{\text{réf}}$ :

$$.29 \quad \underline{\Pi}(X, t) = \Phi_{\text{réf}} \left( X; F \left( X, \begin{matrix} t \\ \tau \\ -\infty \end{matrix} \right) \right)$$

- Changement du référentiel spatial: la contrainte ne dépend que de la déformation pure  $\underline{\Delta}$  (ou  $\underline{\mathbb{C}}$  ou  $\underline{\mathbb{U}}$ ).

Par conséquent, les hypothèses classiques de l'action locale et de la simplicité matérielle, conjuguées aux principes de causalité et d'objectivité nous permettent d'aboutir à la relation fonctionnelle générale liant les contraintes aux déformations:

$$.30 \quad \underline{\Pi}(X, t) = \Phi_{\text{réf}}(X; \underline{\Delta}(X, t))$$

Afin de simplifier cette relation fonctionnelle, nous nous plaçons dans le cas des corps homogènes. Dans ce cas, la dépendance explicite par rapport à  $X$  disparaît. La loi de comportement s'écrit donc:

$$.31 \quad \underline{\Pi}(t) = \mathcal{F} \left[ \begin{matrix} t \\ \underline{\Delta}(\tau) \\ \tau = -\infty \end{matrix} \right]$$

La forme de la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est, en général, approchée par une somme (d'ordre  $N$ ,  $N = 1 \cdots \infty$ ) d'intégrales du tenseur de Green-Lagrange. Pour plus de détails sur ces représentations, on se référera aux travaux de Fréchet [Fréchet, 1910], de Green et Rivlin [Green & Rivlin, 1957], de Spencer et Rivlin [Spencer & Rivlin, 1959] ou de Lockett [Lockett, 1965].

## 0.2 Inégalité de Clausius-Duhem

On considère un système  $\mathcal{S}$  de domaine  $\Omega$  et de frontière  $\partial\Omega$ . Supposons l'existence des grandeurs thermodynamiques suivantes:

- $\mathcal{U}$  l'énergie interne du système

$$.32 \quad \mathcal{U} = \int_{\Omega} \rho u \, d\Omega, \quad u \text{ énergie interne spécifique}$$

- $\mathcal{C}$  l'énergie cinétique du système

$$.33 \quad \mathcal{C} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \underline{u} \cdot \underline{u} d\Omega, \quad \underline{u} \text{ vitesse des particules du système}$$

–  $\mathcal{P}_c$  la puissance calorifique reçue par le système

$$.34 \quad \mathcal{P}_c = \int_{\Omega} r d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{q} \cdot \underline{n} d\partial\Omega$$

avec  $\begin{cases} r \text{ densité volumique de production interne de chaleur} \\ \underline{q} \text{ vecteur courant de chaleur} \\ \underline{n} \text{ normale extérieure à } \partial\Omega \end{cases}$

–  $\mathcal{P}_e$  la puissance des efforts extérieurs

$$.35 \quad \mathcal{P}_e = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{g} \cdot \underline{u} d\partial\Omega$$

avec  $\begin{cases} \underline{f} \text{ force de volume} \\ \underline{g} \text{ force surfacique} \end{cases}$

–  $\mathcal{S}$  l'entropie du système

$$.36 \quad \mathcal{S} = \int_{\Omega} \rho s d\Omega, \quad s \text{ densité d'entropie spécifique}$$

Alors l'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit, dans la configuration actuelle:

$$.37 \quad \underline{\sigma}(\underline{x}, t) : \underline{\mathbb{D}}(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t) [\dot{u}(\underline{x}, t) - \theta(\underline{x}, t) \dot{s}(\underline{x}, t)] - \frac{\underline{q}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\nabla} \theta(\underline{x}, t)}{\theta(\underline{x}, t)} \geq 0$$

Dans la configuration de référence, elle s'écrit:

$$.38 \quad \begin{aligned} \underline{\Pi}(\underline{X}, t) : \underline{\Delta}(\underline{X}, t) &= \rho_0(\underline{X}, t) [\dot{u}_0(\underline{X}, t) - \theta(\underline{X}, t) \dot{s}_0(\underline{X}, t)] \\ &- \frac{\underline{q}_0(\underline{X}, t) \cdot \underline{\nabla} \theta(\underline{X}, t)}{\theta(\underline{X}, t)} \geq 0 \end{aligned}$$

où l'indice 0 se rapporte à la configuration de référence.





## Première partie

### Synthèse bibliographique des différents modèles viscoélastiques



# Introduction

Les lois de comportement peuvent s'écrire sous différentes formes conduisant à des approches qui diffèrent par leur principe.

A ce propos, deux grandes écoles se distinguent dans le développement des lois de comportement en viscoélasticité: l'école anglo-saxonne ([Coleman & Noll, 1961a], [Noll, 1958], [Pipkin, 1964], [Bernstein *et al.*, 1963], [Schapery, 1969]) qui privilégie une approche de type fonctionnelle et l'école française ([Mandel, 1977], [Weber, 1968], [Sidoroff, 1975<sub>a</sub>]) qui est davantage axée sur une approche par variables d'état.

L'approche fonctionnelle consiste à écrire la contrainte sous la forme d'une fonctionnelle de l'histoire passée de la déformation. Fréchet [Fréchet, 1910] a montré que de telles fonctionnelles (sous l'hypothèse qu'elles soient continues) pouvaient être développées en séries d'intégrales multiples. Selon l'ordre du développement, on obtient des expressions de plus en plus complexes et donc des modèles plus ou moins fidèles au comportement réel. Chaque fonctionnelle du développement peut être interprétée comme une fonction de relaxation qui peut être déterminée expérimentalement. Le nombre d'expériences à réaliser devient rapidement élevé lorsque l'on augmente l'ordre du développement ce qui est une limite importante à ce type d'approche qui, malgré tout, reste utile pour des études théoriques.

L'approche par variables d'état suppose que les grandeurs constitutives ne dépendent pas de l'histoire comme le suppose l'approche fonctionnelle, mais qu'elles dépendent uniquement de la valeur actuelle de certaines variables, dites variables d'état supposées être les mêmes que celles qui décrivent l'équilibre. Elle est plus maniable que l'approche précédente puisqu'elle ne fait intervenir qu'un nombre limité de variables d'état et s'inscrit, par sa construction même, dans un cadre thermodynamique. Le problème posé consiste à choisir de façon adéquate les variables d'état et les fonctions d'énergie libre et de dissipation pour décrire un type de comportement donné.

Dans le cadre de cette étude bibliographique, on développera les principaux modèles illustrant les deux écoles en montrant, chaque fois que possible, leurs avantages et leurs limitations.



# Chapitre 1

## Approche fonctionnelle

Dans cette catégorie, on regroupe les modèles basés sur une représentation fonctionnelle des contraintes, de l'énergie libre et de l'entropie (c'est à dire qu'elles dépendent de l'histoire des déformations et de la température [Sidoroff, 1975<sub>a</sub>]) en partant des modèles linéaires (Coleman et Noll [Coleman & Noll, 1961a]) pour arriver aux modèles non linéaires (Lockett [Lockett, 1972]). Nous évoquerons ensuite la notion de temps réduit introduite par Schapery [Schapery, 1969] avant de terminer par le modèle de Christensen [Christensen, 1980] qui est une extension de l'hyperélasticité à la viscoélasticité.

### 1.1 Viscoélasticité linéaire finie

Dans le cadre des modèles viscoélastiques par approche fonctionnelle, on se restreint au cas isotherme. Le point de départ de ces modèles est la relation (.31) liant l'histoire des contraintes à celle des déformations que nous rappelons ci-dessous:

$$\text{I.1} \quad \underline{\underline{\Pi}}(t) = \mathcal{F} \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\underline{\Delta}}(\tau) \\ \tau = -\infty \end{array} \right]$$

En réécrivant cette relation en terme de contrainte de Cauchy, comme l'ont fait Green et Rivlin [Green & Rivlin, 1957], [Pipkin, 1964], on obtient:

$$\text{I.2} \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \frac{1}{J} \underline{\underline{\mathbb{F}}}(t) \cdot \underline{\underline{\Pi}}(t) \cdot {}^t\underline{\underline{\mathbb{F}}}(t) = \frac{1}{J} \underline{\underline{\mathbb{F}}}(t) \cdot \mathcal{F} \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\underline{\Delta}}(\tau) \\ \tau = -\infty \end{array} \right] \cdot {}^t\underline{\underline{\mathbb{F}}}(t)$$

Pour supprimer la difficulté issue des grandes déformations, Green et Rivlin [Green & Rivlin, 1957], [Pipkin, 1964] ont superposé ces grandes déformations à de petites déformations, de telle sorte que la réponse globale du matériau puisse être considérée comme linéaire.

◇ **Petites déformations superposées à de grandes déformations**

Si les déformations sont suffisamment petites, le comportement peut être considéré comme linéaire, même si elles sont superposées à de grandes déformations. Notons  $\underline{\underline{\Delta}}_0$  cette grande déformation. Green et Rivlin expriment alors la loi de comportement, écrite en contrainte de Cauchy, en fonction de trois tenseurs, relatifs à la déformation  $\underline{\underline{\Delta}}_0$ , qu'ils définissent ainsi:

$$\text{I.3} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbb{F}}}^0(t) = \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_p^0} \\ 2\underline{\underline{\Delta}}_{ij}^0(\tau) = \frac{\partial x_k(\tau)}{\partial x_i^0} \frac{\partial x_k(\tau)}{\partial x_j^0} - \delta_{ij} \\ \underline{\underline{\mathbb{B}}}^0_{ij} = \frac{\partial x_i^0}{\partial X_p} \frac{\partial x_j^0}{\partial X_p} \end{array} \right.$$

où  $x_i^0(X_p)$  sont les coordonnées de la particule  $X_p$  à un instant particulier de la déformation  $\underline{\underline{\Delta}}_0$ .

En termes de  $\underline{\underline{\Delta}}^0(\tau)$  et  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}^0(\tau)$ , la relation développée à l'ordre 1 (I.2), écrite en contrainte de Cauchy, pour des petites déformations superposées à de grandes déformations dans un matériau initialement isotrope, prend la forme [Pipkin & Rivlin, 1961]:

$$\text{I.4} \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\mathbb{F}}}^0(t) \cdot \left\{ \underline{\underline{T}}_0(\underline{\underline{\mathbb{B}}}^0) + \underline{\underline{T}}_1 \left[ \begin{array}{c} \underline{\underline{\Delta}}^0(\tau) \\ \tau = -\infty \end{array} ; \underline{\underline{\mathbb{B}}}^0 \right] \right\} \cdot {}^t \underline{\underline{\mathbb{F}}}^0(t)$$

où  $\underline{\underline{T}}_0$  est une fonction tensorielle des invariants de  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}^0$  et  $\underline{\underline{T}}_1$  une fonctionnelle des invariants de  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}^0$  et de l'histoire de  $\underline{\underline{\Delta}}^0$ .

**Remarque 1.1** On remarque que le déterminant  $J$  de  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}$  de la relation (I.2) n'apparaît pas dans la relation (I.4). Il est tout simplement inclus dans les termes  $\underline{\underline{T}}_{i(i=0,1)}$ .

**Remarque 1.2** La relation (I.4) peut être réécrite en contrainte de Piola-Kirchhoff 2, ce qui donne:

$$\text{I.5} \quad \underline{\underline{\Pi}}(t) = \left\{ \underline{\underline{T}}_0(\underline{\underline{\mathbb{B}}}^0) + \underline{\underline{T}}_1 \left[ \begin{array}{c} \underline{\underline{\Delta}}^0(\tau) \\ \tau = -\infty \end{array} ; \underline{\underline{\mathbb{B}}}^0 \right] \right\}$$

Toutefois, cette vision est limitée par le fait que la déformation doit être petite. Pour pallier à cet inconvénient, Coleman et Noll ont considéré la configuration actuelle comme étant la configuration de référence (approche eulérienne) pour décrire l'histoire de la déformation car, souvent, soit on ne connaît pas la configuration de référence naturelle du matériau, soit il y a plusieurs états d'équilibre possibles sous contrainte nulle, soit la configuration naturelle n'est pas celle que l'on veut privilégier.

#### ◊ Le modèle de Coleman et Noll

Au lieu d'introduire un gradient de transformation et un tenseur «grandes déformations» définis par rapport à une grande déformation, Coleman et Noll [Coleman & Noll, 1961a] définissent une nouvelle mesure de déformation à partir du gradient relatif. Ils remplacent donc les relations (I.3) par:

$$\text{I.6} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\mathbb{F}}}_t(\tau) = \left\{ \frac{\partial x_i(\tau)}{\partial x_j(t)} \right\} \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}_t(\tau) = {}^t\underline{\underline{\mathbb{F}}}_t(\tau) \underline{\underline{\mathbb{F}}}_t(\tau) \end{cases}$$

Selon la valeur de  $\tau$ , ces deux tenseurs prennent des valeurs particulières, à savoir:

$$\text{I.7} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\mathbb{F}}}_t(\tau) = \begin{cases} \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-1} & \text{si } \tau > 0 \\ \underline{\underline{\mathbb{I}}} & \text{si } \tau \leq 0 \end{cases} \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}_t(\tau) = \begin{cases} {}^t\underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbb{B}}}^{-1} & \text{si } \tau > 0 \\ \underline{\underline{\mathbb{I}}} & \text{si } \tau \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Coleman et Noll [Coleman & Noll, 1961a] écrivent la loi de comportement en terme de tenseur de contrainte de Cauchy modifié  $\bar{\underline{\underline{\sigma}}}(t) = {}^t\underline{\underline{\mathbf{R}}}(t) \cdot \underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot \underline{\underline{\mathbf{R}}}(t)$  en fonction du tenseur  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_t(\tau) = {}^t\underline{\underline{\mathbf{R}}}(t) \cdot \underline{\underline{\mathbb{C}}}_t(\tau) \cdot \underline{\underline{\mathbf{R}}}(t)$  ( $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$  étant la rotation de la matière).

En utilisant la théorie des espaces de Hilbert, ils aboutissent à la loi de comportement, écrite à l'ordre 1, suivante:

$$\text{I.8} \quad \bar{\underline{\underline{\sigma}}}(t) = \underline{\underline{T}}'_0(\underline{\underline{\mathbb{C}}}(t)) + \int_0^\infty \underline{\underline{T}}'_1(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_t(t-s); \underline{\underline{\mathbb{C}}}(t)) \, ds$$

où  $\underline{\underline{T}}'_0$  et  $\underline{\underline{T}}'_1$  sont respectivement une fonction tensorielle et une fonctionnelle analogues à  $\underline{\underline{T}}'_0$  et  $\underline{\underline{T}}'_1$  mais qui dépendent des invariants de  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$  et de l'histoire de  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_t$ .

**Remarque 1.3** En récrivant la relation (I.8) en terme de contrainte de Piola-Kirchhoff 2, on obtient:

$$\text{I.9} \quad \underline{\underline{\Pi}}(t) = \underline{\underline{T}}''_0(\underline{\underline{\mathbb{C}}}(t)) + \int_{-\infty}^t \underline{\underline{T}}''_1(\underline{\underline{\mathbb{C}}}(t); \underline{\underline{\mathbb{C}}}(t)) \, d\tau$$

Lorsque l'on applique le modèle de Coleman et Noll aux matériaux isotropes, il est plus pratique de prendre la configuration de référence comme étant *non déformée* [Noll, 1958], [Truesdell & Noll, 1965]. La contrainte est alors déterminée par l'histoire de la déformation et par la déformation actuelle seulement, à condition que l'on choisisse comme mesure de déformation actuelle le tenseur  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}$  (ou  $\underline{\underline{\mathbb{V}}}$ ). Dans ce cas, les résultats issus de [Noll, 1958], [Truesdell & Noll, 1965] montrent que les équations constitutives (I.8) et (I.9) se réduisent respectivement à:

$$\text{I.10} \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{T}}'_0(\underline{\underline{\mathbb{B}}}(t)) + \int_0^\infty \underline{\underline{T}}'_1(\underline{\underline{\mathbb{C}}}(t-s); \underline{\underline{\mathbb{B}}}(t)) \, ds$$

$$\text{I.11} \quad \underline{\underline{\Pi}}(t) = \underline{\underline{T}}''_0(\underline{\underline{\mathbb{B}}}(t)) + \int_0^\infty \underline{\underline{T}}''_1(\underline{\underline{\mathbb{C}}}(\tau); \underline{\underline{\mathbb{B}}}(t)) \, d\tau$$

où les fonctions tensorielles  $\underline{\underline{T}}'_0$  et  $\underline{\underline{T}}''_0$  et les fonctionnelles  $\underline{\underline{T}}'_1$  et  $\underline{\underline{T}}''_1$  sont isotropes.

On remarque que la relation (I.11) s'apparente à la relation (I.5) déterminée par Green et Rivlin. Dans le paragraphe suivant, on montre que l'on peut passer de l'une à l'autre moyennant certaines considérations.

#### ◇ Liens entre les modèles de Green & Rivlin et de Coleman & Noll

On présente ici les arguments de Coleman et Noll [Coleman & Noll, 1961a], [Pipkin, 1964] qui ont permis d'établir des liens entre les deux formulations.

Dans la théorie de Green et Rivlin, la déformation stabilisée  $\underline{\underline{\Delta}}_0$  peut être choisie de telle sorte que  $\underline{\underline{\Delta}}(\tau) - \underline{\underline{\Delta}}_0$  soit petite dans un intervalle de temps  $T$  suffisamment long précédant l'instant  $t$  où la contrainte est mesurée. Dans ce cas, la relation (I.5) est toujours applicable, que le matériau soit dans l'état stabilisé ou pas. En particulier, pour toute valeur de  $t$ , on peut choisir  $\underline{\underline{\Delta}}_0$  comme étant la valeur de  $\underline{\underline{\Delta}}(\tau)$  à l'instant  $t$ , c'est à dire  $\underline{\underline{\Delta}}_0 = \underline{\underline{\Delta}}(t)$ . Par conséquent,  $\underline{\underline{D}}(\tau) = \underline{\underline{\Delta}}(\tau) - \underline{\underline{\Delta}}_0$  est la différence entre l'histoire de déformation actuelle  $\underline{\underline{\Delta}}(\tau)$  et l'histoire fictive d'une déformation stabilisée dans laquelle la déformation a toujours la valeur  $\underline{\underline{\Delta}}(t)$ . Avec ce choix de  $\underline{\underline{\Delta}}_0$ ,  $\underline{\underline{D}}(\tau)$  dépend paramétriquement de  $t$  (à travers le choix  $\underline{\underline{\Delta}}_0 = \underline{\underline{\Delta}}(t)$ ). On peut alors l'écrire  $\underline{\underline{D}}(\tau; t)$ , avec, par définition,  $\underline{\underline{D}}(t; t) = 0$ .  $\underline{\underline{D}}(\tau; t)$  peut être petit dans un long intervalle (en  $\tau$ ) précédant  $t$ . C'est en particulier le cas lorsque la déformation varie suffisamment lentement. Si on choisit  $x_i^0(X_p)$  comme étant les coordonnées des particules  $X_p$  à l'instant  $t$ , de sorte que  $x_i^0 = x_i(t)$ , alors les gradients  $\frac{\partial x_i^0}{\partial X_p}$  dépendent paramétriquement de  $t$ , mais ne sont pas des fonctions de  $\tau$ . Avec ce choix de  $x_i^0$ , la déformation relative  $\underline{\underline{\Delta}}^0(\tau)$  de la relation (I.3) doit être notée  $\underline{\underline{\Delta}}^0(\tau; t)$  et est égale au tenseur de Green-Lagrange  $\underline{\underline{\Delta}}(\tau; t)$  et le tenseur des dilatations gauche relatif  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}^0$  de la relation (I.3) doit être noté  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}(t)$ , tenseur des dilatations gauche (non relatif).



Dans ce cas, le gradient de transformation  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}^0$  de la loi de comportement (I.4) vaut:  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}^0_{ip} = \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_p^0} = \delta_{ip}$ . Cette loi de comportement devient alors:

$$\text{I.12} \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \left\{ \underline{\underline{T}}_0(\underline{\underline{\mathbb{B}}}) + \underline{\underline{T}}_1 \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\underline{\Delta}}(\tau; t) \\ \tau = -\infty \end{array} ; \underline{\underline{\mathbb{B}}} \right] \right\}$$

Cette relation peut être réécrite en fonction du tenseur de Cauchy-Green droit, ce qui donne:

$$\text{I.13} \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \left\{ \underline{\underline{T}}_0(\underline{\underline{\mathbb{B}}}) + \underline{\underline{T}}_1 \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\tau; t) \\ \tau = -\infty \end{array} ; \underline{\underline{\mathbb{B}}} \right] \right\}$$

Cette relation peut être comparée à la relation (I.10) correspondant à la loi de comportement en viscoélasticité linéaire finie d'un matériau isotrope établie par Coleman et Noll.

Le modèle de Green-Rivlin est plus adapté aux problèmes des petites vibrations. En revanche, celui de Coleman et Noll est plus approprié pour les problèmes où la déformation varie lentement tout en étant grande ce qui en fait un modèle plus avantageux pour les grandes déformations qui sont l'objet de ce travail.

Une application des théories de Green et Rivlin et de Coleman et Noll est le modèle de Bernstein, Kearsley et Zapas (communément appelé BKZ) qui pose le problème de l'identification (expérimentale) des fonctionnelles. Dans lesdites théories, l'histoire de contrainte est une fonctionnelle de l'histoire du gradient de transformation. L'inconvénient d'une telle écriture est que, à partir des résultats d'une histoire du gradient de transformation, on ne peut pas prédire les résultats d'une autre histoire du gradient de transformation. Ainsi, le premier point faible des deux théories est d'avoir admis (et donc contourné) la question de savoir dans quel sens une histoire de déformation peut en approcher une autre. D'autre part, les modèles de Green & Rivlin et de Coleman & Noll génèrent un nombre élevé de caractéristiques matérielles à identifier. L'expérimentateur ne peut pas effectuer un nombre indéfini ou infini (même dénombrable) d'essais. Par conséquent, il faudrait limiter le nombre de paramètres du matériau à un nombre fini et petit en ajoutant à la théorie des hypothèses empiriques raisonnables. C'est en partant des modèles de Green et Rivlin et de Coleman et Noll et en se basant sur des hypothèses justifiées par l'expérience, que Bernstein, Kearsley et Zapas ont construit leur modèle que nous présentons au paragraphe suivant.

## 1.2 Le modèle de Bernstein, Kearsley et Zapas (BKZ)

Souvent, les matériaux viscoélastiques sont modélisés par l'adjonction de termes visqueux à la théorie des solides élastiques (modèle classique de Voigt) ou par l'adjonction de termes élastiques à la théorie des fluides (modèle de Maxwell). Mais cette vision n'est plus valable pour de fortes non linéarités.

Bernstein, Kearsley et Zapas [Bernstein *et al.*, 1963] ont développé une théorie (le modèle BKZ) pour les matériaux incompressibles, sous deux formes: la première, valable pour les solides et la seconde, pour les fluides. La première est valable pour les élastomères aux temps courts et à de faibles températures alors que la seconde est applicable aux temps longs et à des températures élevées.

### 1.2.1 Solide incompressible

La première forme du modèle BKZ est basée sur deux hypothèses:

- La théorie de Green et Rivlin permet d'écrire la fonctionnelle  $\mathcal{F}(\underline{\underline{\Delta}}(\tau), t)$  reliant la contrainte de Cauchy (ou de Piola-Kirchhoff) à la déformation (relation (I.2)) sous forme polynomiale de degré un ce qui, pour un matériau isotrope, donne:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\underline{\underline{\Delta}}(\tau), t) = & M \underline{\underline{1}} + \chi \operatorname{tr} \underline{\underline{\Delta}}(t) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\Delta}}(t) \\ \text{I.14} \quad & - \int_{-\infty}^t a(t-\tau) \operatorname{tr} \underline{\underline{\Delta}}(\tau) \underline{\underline{1}} d\tau - 2 \int_{-\infty}^t b(t-\tau) \underline{\underline{\Delta}}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

où:

$$\begin{cases} M, \chi \text{ et } \mu \text{ sont des constantes du matériau} \\ a \text{ et } b \text{ sont des fonctions du temps et du matériau} \end{cases}$$

- On suppose qu'à l'équilibre, le comportement est défini par une densité d'énergie de déformation [Signorini, 1955]:

$$\text{I.15} \quad W = M I_1^\Delta + \frac{1}{2} A I_1^{\Delta^2} + B I_2^\Delta$$

avec:

$$\begin{cases} I_1^\Delta = \operatorname{tr} \underline{\underline{\Delta}}, I_2^\Delta = \operatorname{tr} \underline{\underline{\Delta}}^2, A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t), B = \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) \\ A(t) = \chi - \int_0^t a(\tau) d\tau, B(t) = \mu - \int_0^t b(\tau) d\tau \end{cases}$$

Ceci nous conduit donc à écrire la contrainte de Cauchy, pour un essai de traction/relaxation uniaxiale d'élongation  $\lambda$  sous la forme:

$$\text{I.16} \quad \frac{\sigma(t)}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}} = (\lambda^2 - 1) \left[ \frac{1}{2} A(t) + B(t) \right] + \frac{1}{\lambda} [A(t) + B(t)] + M - A(t)$$

qui vérifie la condition d'équilibre sans force de volume:

$$\text{I.17} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Le comportement est donc identifié par deux intégrales simples  $A(t)$  et  $B(t)$  et une constante  $M$ .

### 1.2.2 Fluides incompressibles

La seconde forme du modèle BKZ pour les fluides incompressibles, est inspirée des travaux de Coleman et Noll [Coleman & Noll, 1961a] en utilisant un potentiel élastique. On utilise le concept de fonction d'énergie de déformation associée à la théorie des déformations élastiques finies et on l'incorpore dans la théorie des fluides de Coleman et Noll [Coleman & Noll, 1961a] en considérant toutes les configurations passées comme configurations préférentielles. Bernstein *et al.* définissent un gradient de transformation à l'instant  $t$  par rapport à la configuration à l'instant  $\tau$  par:

$$\mathbb{F}_{ij}(t, \tau) = \left[ \frac{\partial x_i(t)}{x_j(\tau)} \right]$$

qui s'apparente au gradient relatif  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}(\tau)$  introduit par Coleman & Noll (relation (I.6)).

Quant au tenseur de déformation associé, il s'écrit:

$$\Delta_{ij}(t, \tau) = \frac{1}{2} [\mathbb{C}_{ij}(t, \tau) - \delta_{ij}]$$

De même,  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}(t, \tau)$  s'apparente au tenseur  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}(\tau)$  introduit par Coleman & Noll (relation (I.6)).

En supposant l'existence d'une fonction d'énergie  $\Psi$  qui, en vertu du principe d'indifférence matérielle [Noll, 1958], ne dépend que des deux premiers invariants de  $\underline{\underline{\Delta}}$ , on a:

$$\Psi = \Psi [I_1^\Delta(t, \tau), I_2^\Delta(t, \tau), t - \tau]$$

qui, à l'ordre 2, s'écrit:

$$\Psi = m(t - \tau) I_1^\Delta + \frac{a(t - \tau)}{2} I_1^{\Delta^2} + b(t - \tau) I_2^\Delta$$

où  $a(t - \tau)$ ,  $b(t - \tau)$  et  $m(t - \tau)$  sont des fonctions du matériau.

On obtient alors une contrainte pour un essai de traction/relaxation uniaxiale d'élongation  $\lambda$  de la forme [Bernstein *et al.*, 1963]:

$$\text{I.18} \quad \frac{\sigma(t)}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}} = (\lambda^2 - 1) \left[ \frac{1}{2} A(t) + B(t) \right] + \frac{1}{\lambda} [A(t) + B(t)] + M(t) - A(t)$$

avec:

$$A(t) = \int_t^\infty a(\tau) d\tau, \quad B(t) = \int_t^\infty b(\tau) d\tau, \quad M(t) = \int_t^\infty m(\tau) d\tau$$

On remarque que les relations (I.16) et (I.18) ont une apparence identique. Toutefois, il convient de remarquer que:

- A, B et M n'ont pas la même signification dans les deux cas
- pour les fluides, M dépend du temps
- pour les fuides:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = 0$$

### 1.2.3 Identification expérimentale

Les relations (I.16) et (I.18), qui s'appliquent à des essais de traction/relaxation, peuvent s'écrire:

$$\begin{aligned} \text{I.19} \quad \sigma_R(t) = \frac{\sigma(t)}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}} &= (\lambda^2 - 1)\alpha(t) + \frac{1}{\lambda}\beta(t) + \gamma(t) \\ &= \left[ (\lambda^2 - 1)R(t) + \frac{1}{\lambda} \right] \beta(t) + \gamma(t) \end{aligned}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \alpha(t) = \frac{1}{2}A(t) + B(t), & \beta(t) = A(t) + B(t) \\ \gamma(t) = M(t) - A(t), & R(t) = \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \end{cases}$$

En faisant varier  $\lambda$ , on peut représenter l'évolution de  $\sigma_R(t)$  en fonction de  $\frac{1}{\lambda}$ . Chacune de ces courbes admet un minimum, observé également expérimentalement, donné par:

$$\text{I.20} \quad \frac{1}{\lambda} = \left[ \frac{2\alpha(t)}{\beta(t)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Une fois ce minimum déterminé, on peut calculer  $R(t)$ .

D'autre part, en traçant l'évolution de  $\sigma_R(t)$  en fonction de  $(\lambda^2 - 1)R(t) + \frac{1}{\lambda}$ , l'équation (I.19) montre que l'on obtient une droite de pente  $\beta(t)$  coupant l'axe des ordonnées en  $\gamma(t)$ .

Ainsi, les coefficients  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $\gamma(t)$  sont identifiés et, par conséquent,  $A(t)$ ,  $B(t)$  et  $M(t)$  également. Selon la dépendance de  $M$  par rapport au temps, on pourra dire si le comportement est de type fluide ou solide.

### 1.2.4 Limitations

Malgré une bonne concordance entre théorie et expérience, les auteurs émettent cependant des réserves dans la mesure où un seul type d'expériences ne peut pas être une preuve formelle de la justesse du modèle. Par exemple, dans le cas de l'hyperélasticité, ce type d'expériences s'avère insuffisant et ne conduit pas à une bonne identification du matériau.

On peut ajouter à ces réserves d'autres limites du modèle telles que la non linéarité qui n'est que géométrique et la restriction au cas incompressible.

Une des limites de ces théories issues de la viscoélasticité linéaire finie est que les fonctionnelles donnant la contrainte d'un matériau simple sont linéaires. C'est pourquoi Coleman et Noll [Coleman & Noll, 1961a] ont introduit la viscoélasticité d'ordre supérieur qui fait l'objet du paragraphe suivant.

## 1.3 Viscoélasticité d'ordre supérieur

### 1.3.1 Viscoélasticité d'ordre 2

Dans cette partie et afin de remédier à l'inconvénient précédent, la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  de la relation (I.1) est approchée par une fonctionnelle polynomiale d'ordre 2. Ceci nous conduit à écrire la relation (I.9) sous la forme [Coleman & Noll, 1961a]:

$$\underline{\Pi}(t) = \underline{T}_0'(\underline{\mathbb{C}}(t)) + \int_{-\infty}^t \underline{T}_1'(\underline{\mathbb{C}}(\tau); \underline{\mathbb{C}}(t)) d\tau$$

**I.21**

$$+ \mathcal{D} \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\mathbb{C}}(\tau) \\ s = -\infty \end{array} ; \underline{\mathbb{C}}(t) \right] + \mathcal{R}' \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\mathbb{C}}(\tau) \\ \tau = -\infty \end{array} ; \underline{\mathbb{C}}(t) \right]$$

$$\text{avec } \lim_{\|\underline{\mathbb{C}}(\tau)\| \rightarrow 0} \|\underline{\mathbb{C}}(\tau)\|^{-2} \mathcal{R}' \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\mathbb{C}}(\tau) \\ \tau = -\infty \end{array} ; \underline{\mathbb{C}}(t) \right] = 0$$

La fonctionnelle quadratique  $\mathcal{D}$  peut être exprimée en termes d'opérateurs symétriques bornés dans l'espace de Hilbert. Une étude thermodynamique simple montre que si l'on considère deux essais de cisaillement à élongation opposée, la fonctionnelle  $\mathcal{D}$  est identiquement nulle et on se retrouve dans le cas de la viscoélasticité d'ordre 1. D'où l'intérêt de faire un développement d'ordre supérieur ( $n > 2$ ) avec un résidu d'ordre  $o(\|\underline{\underline{C}}(\tau)\|^n)$  ce que Lockett [Lockett, 1965] s'est intéressé à faire et qui fait l'objet du paragraphe suivant.

### 1.3.2 Viscoélasticité d'ordre 3

#### ◇ Loi de comportement

Lockett [Lockett, 1965] a étendu les travaux de Noll [Noll, 1958] et de Green et Rivlin [Green & Rivlin, 1957] en développant des équations constitutives, pour des matériaux simples isotropes [Noll, 1958] jusqu'à l'ordre 3. Un tel développement nécessite douze fonctions caractéristiques (de relaxation ou de fluage selon le cas). En utilisant une généralisation du théorème de Cayley-Hamilton, le tenseur  $\underline{\underline{Q}}$ , qui est soit une contrainte (de Cauchy ou de Piola-Kirchhoff) soit une déformation (Green-Lagrange), s'écrit, pour un matériau initialement isotrope:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{Q}}(t) = & \int_0^t \left\{ \underline{\underline{1}}\psi_1 T_1 + \psi_2 \underline{\underline{M}}_1 \right\} d\tau_1 \\
 & + \int_0^t \int_0^t \left\{ \underline{\underline{1}}\psi_3 T_1 T_2 + \underline{\underline{1}}\psi_4 T_{12} + \psi_5 T_1 \underline{\underline{M}}_2 + \psi_6 \underline{\underline{M}}_1 \cdot \underline{\underline{M}}_2 \right\} d\tau_1 d\tau_2 \\
 & + \int_0^t \int_0^t \int_0^t \left\{ \underline{\underline{1}}\psi_7 T_{123} + \underline{\underline{1}}\psi_8 \underline{\underline{M}}_1 T_{23} + \psi_9 T_1 T_2 \underline{\underline{M}}_3 + \psi_{10} T_{12} \underline{\underline{M}}_3 \right. \\
 & \quad \left. + \psi_{11} T_1 \underline{\underline{M}}_2 \cdot \underline{\underline{M}}_3 + \psi_{12} \underline{\underline{M}}_1 \cdot \underline{\underline{M}}_2 \cdot \underline{\underline{M}}_3 \right\} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{I.22}$$

Dans cette relation, on a:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 T_\alpha = tr \underline{\underline{P}}(\tau_\alpha), T_{\alpha\beta} = tr \left[ \underline{\underline{P}}(\tau_\alpha) \cdot \underline{\underline{P}}(\tau_\beta) \right], T_{\alpha\beta\gamma} = tr \left[ \underline{\underline{P}}(\tau_\alpha) \cdot \underline{\underline{P}}(\tau_\beta) \cdot \underline{\underline{P}}(\tau_\gamma) \right] \\
 \underline{\underline{M}}_\alpha = \underline{\underline{P}}(\tau_\alpha), \underline{\underline{P}} \text{ est le dual de } \underline{\underline{Q}} \\
 \psi_1, \psi_2 = f_1(t - \tau_1), \psi_3 \dots \psi_6 = f_2(t - \tau_1, t - \tau_2) \\
 \psi_7 \dots \psi_{12} = f_3(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \\
 \psi_1 \dots \psi_{12} \text{ sont des fonctions de relaxation ou de fluage}
 \end{array} \right.$$

### ◇ Interprétation des tenseurs $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{Q}}$ et identification expérimentale

Lorsque l'on effectue des essais de fluage,  $\underline{\underline{Q}}$  s'apparente à une déformation (Green-Lagrange) et  $\underline{\underline{P}}$  à une contrainte (Cauchy ou son déviateur dans le cas incompressible).

L'identification se fait à l'aide d'essais simples si  $\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}}$ . En revanche, les essais deviennent difficiles à mettre en oeuvre si  $\underline{\underline{\mathbf{R}}} \neq \underline{\underline{\mathbf{1}}}$ .

### ◇ Limitations

L'inconvénient majeur d'une telle approche réside dans l'identification des paramètres. En effet, si de simples expériences de fluage ou de relaxation suffisent à identifier le comportement, leur nombre reste cependant très élevé.

Une autre alternative de l'approche fonctionnelle est de construire les lois constitutives à partir d'un principe de Boltzmann modifié. C'est la voie suivie par Leaderman et Schapery et que nous présentons maintenant.

## 1.4 Extension du principe de superposition de Boltzmann

### 1.4.1 Le modèle de Leaderman

Leaderman [Leaderman, 1962] a voulu étendre la non linéarité au cas des petites déformations [Ward, 1985] et a basé son interprétation sur le principe de superposition de Boltzmann.

Leaderman [Leaderman, 1962],[Ward, 1985] a développé sa théorie unidimensionnelle à partir d'un certain nombre de constatations expérimentales:

- Il a constaté que la fonction de fluage était différente selon le niveau de contrainte (figure 1.1a),
- ensuite, il a remarqué que les fonctions de fluage et de relaxation coïncidaient pour un même niveau de contrainte (figures 1.1a et 1.1b),
- enfin, il a constaté que chacune des fonctions de fluage et de relaxation étaient égales aux temps très courts, quel que soit le niveau de contrainte (figures 1.1a et 1.1b).

Il a émis deux explications à ces constatations:

- Il y a une déformation élastique instantanée proportionnelle à la contrainte
- Le fluage et la relaxation sont des fonctions uniques de la contrainte.

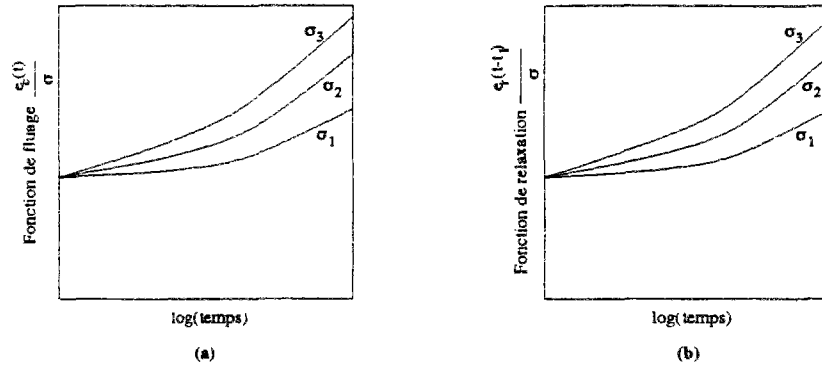


FIG. 1.1 - Comparaison entre fonctions de fluage et de relaxation pour différents niveaux de contrainte [Ward, 1985]

Ceci l'a conduit à proposer un principe de superposition modifié (uniaxial):

$$\text{I.23} \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + \int_{-\infty}^t \frac{df(\sigma)}{d\tau} (t - \tau) d\tau$$

où  $f(\sigma)$  est une fonction empirique de la contrainte uniaxiale  $\sigma$ .

Toutefois, ce principe est limité dans ces applications car il ne décrit pas les comportements pour des chargements plus complexes que le fluage et la relaxation. De plus, il fait l'hypothèse de décomposition multiplicative des noyaux qui n'est pas toujours applicable aux matériaux réels.

### 1.4.2 Le temps réduit de Schapery

Schapery [Schapery, 1969] a essayé d'utiliser le principe de Boltzmann généralisé par Leaderman [Leaderman, 1962], [Ward, 1985] afin de tenir compte de la non linéarité issue de la dépendance en température.

#### ◇ Temps réduit en contrainte

Schapery [Schapery, 1969], [Ward, 1985] généralise la loi de comportement unidimensionnelle (I.23) sous la forme:

$$\text{I.24} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(t) = g_0 \underline{\underline{\mathbb{J}}} : \underline{\underline{\sigma}}(t) + g_1 \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\Delta \mathbb{J}}}(\psi - \psi') : \frac{dg_2[\underline{\underline{\sigma}}(\tau)]}{d\tau} d\tau$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} g_0, g_1 \text{ et } g_2 \text{ sont des propriétés du matériau qui dépendent de la contrainte} \\ \underline{\underline{\mathbb{J}}} \text{ est le module de fluage instantané} \\ \underline{\underline{\Delta \mathbb{J}}} = \underline{\underline{\mathbb{J}}} - \underline{\underline{\mathbb{J}}}_0, \underline{\underline{\mathbb{J}}} \text{ étant le tenseur de fluage classique} \\ \text{et } \psi \text{ le temps réduit défini par :} \end{array} \right.$$



$$\psi \equiv \psi(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a_\sigma [\underline{\underline{\sigma}}(t')]} \quad , \quad a_\sigma > 0 \quad \text{et} \quad \psi' = \psi(\tau)$$

avec  $\lim_{\underline{\underline{\sigma}} \rightarrow \underline{\underline{0}}} (g_0 \ g_1 \ g_2 \ a_\sigma) = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$  pour s'assurer de la compatibilité avec la formulation linéaire aux petites déformations<sup>1</sup>.

#### ◇ Temps réduit en déformation

Schapery propose une formulation duale de la précédente:

$$\text{I.25} \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = h_\infty \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\infty} : \underline{\underline{\varepsilon}}(t) + h_1 \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\Delta \mathbb{R}}}(\rho - \rho') : \frac{dh_2 [\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)]}{d\tau} d\tau$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} h_\infty, h_1 \text{ et } h_2 \text{ sont des propriétés du matériau qui dépendent de la déformation} \\ \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\infty} \text{ est le module de relaxation à l'équilibre} \\ \underline{\underline{\Delta \mathbb{R}}} = \underline{\underline{\mathbb{R}}} - \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\infty}, \underline{\underline{\mathbb{R}}} \text{ étant le tenseur de relaxation classique} \\ \rho \text{ le temps réduit défini par :} \end{array} \right.$$

$$\rho \equiv \rho(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a_\varepsilon [\underline{\underline{\varepsilon}}(t')]} \quad , \quad a_\varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \rho' = \rho(\tau)$$

avec, comme précédemment  $\lim_{\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \underline{\underline{0}}} (h_\infty \ h_1 \ h_2 \ a_\varepsilon) = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$

#### ◇ Identification expérimentale

Le comportement précédemment défini est entièrement identifié par quatre fonctions de la contrainte ou de la déformation ( $g_0, g_1, g_2$  et  $a_\sigma$  ou  $h_\infty, h_1, h_2$  et  $a_\varepsilon$ ) et le temps réduit. En guise d'identification expérimentale, considérons un essai de fluage simple et un essai de relaxation simple. La fonction de fluage non linéaire  $\underline{\underline{\mathbb{J}}}_{\infty}$  et la fonction de relaxation non linéaire  $\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\infty}$  s'expriment par:

$$\begin{aligned} \text{I.26} \quad \underline{\underline{\mathbb{J}}}_{\infty}(t) &= g_0 \underline{\underline{\mathbb{J}}}_{\infty} + g_1 g_2 \underline{\underline{\Delta \mathbb{J}}}_{\infty} \left( \frac{t}{a_\sigma} \right) \\ \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\infty}(t) &= h_\infty \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\infty} + h_1 h_2 \underline{\underline{\Delta \mathbb{R}}}_{\infty} \left( \frac{t}{a_\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

---

1.  $\underline{\underline{0}}$  est le tenseur nul d'ordre 2

Schapery [Schapery, 1969], [Ward, 1985] propose la méthode graphique suivante pour déterminer les fonctions caractéristiques du comportement. Des relations (I.26), on déduit:

$$\text{I.27} \quad \begin{aligned} \log \left( \underset{\equiv_n}{\mathbb{J}}(t) - g_0 \underset{\equiv_0}{\mathbb{J}} \right) &= \log(g_1 g_2) + \log \left[ \underset{\equiv}{\Delta \mathbb{J}} \left( \frac{t}{a_\sigma} \right) \right] \\ \log \left( \underset{\equiv_n}{\mathbb{R}}(t) - h_\infty \underset{\equiv_\infty}{\mathbb{R}} \right) &= \log(h_1 h_2) + \log \left[ \underset{\equiv}{\Delta \mathbb{R}} \left( \frac{t}{a_\varepsilon} \right) \right] \end{aligned}$$

Les courbes  $\log \left( \underset{\equiv_n}{\mathbb{J}}(t) - g_0 \underset{\equiv_0}{\mathbb{J}} \right)$  (*resp.*  $\log \left( \underset{\equiv_n}{\mathbb{R}}(t) - h_\infty \underset{\equiv_\infty}{\mathbb{R}} \right)$ ) en fonction de  $\log(t)$ , pour différents niveaux de contrainte (*resp.* de déformation) se ramènent à une courbe maîtresse par translation le long des deux axes. Pour des essais effectués en petites déformations pour lesquels  $g_0 = g_1 = g_2 = a_\sigma = 1$  (*resp.*  $h_\infty = h_1 = h_2 = a_\varepsilon = 1$ ), les coefficients de translation sont:

$$\begin{aligned} \text{en abscisses: } &\log(a_\sigma) \quad (\text{resp. } \log(a_\varepsilon)) \\ \text{en ordonnées: } &\log(g_1 g_2) \quad (\text{resp. } \log(h_1 h_2)) \end{aligned}$$

Ceci permet de déterminer les fonctions  $g_0, \underset{\equiv}{\mathbb{J}}, a_\sigma, g_1 g_2$  (*resp.*  $h_\infty, \underset{\equiv}{\mathbb{R}}, a_\varepsilon, h_1 h_2$ ). Pour séparer ces deux dernières fonctions, Schapery effectue des simulations multiéchelons du type fluage-recouvrance (*resp.* relaxation-effacement) et utilise la propriété des fonctions  $g_i$  et  $a_\sigma$  (*resp.*  $h_i$  et  $a_\varepsilon$ ) pour une valeur de contrainte (*resp.* déformation) nulle pour écrire la forme de la réponse que l'on obtient:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} = \underline{\sigma}_0 g_2 : &\left[ \underset{\equiv}{\Delta \mathbb{J}} \left( \frac{t_1}{a_\sigma} + t - t_1 \right) - \underset{\equiv}{\Delta \mathbb{J}}(t - t_1) \right] \\ \left( \text{resp. } \underline{\sigma} = \underline{\varepsilon}_0 h_2 : &\left[ \underset{\equiv}{\Delta \mathbb{R}} \left( \frac{t_1}{a_\varepsilon} + t - t_1 \right) - \underset{\equiv}{\Delta \mathbb{R}}(t - t_1) \right] \right) \end{aligned}$$

où  $t_1$  représente l'instant de décharge.

On peut alors déterminer la fonction  $g_2$  (*resp.*  $h_2$ ) et par conséquent identifier tout le comportement.

#### ◇ Limitations

Dans son développement, Schapery fait implicitement l'hypothèse des petites déformations. De plus, dans le cas tridimensionnel, pour un comportement isotrope et compressible, un tel modèle fait intervenir dix fonctions caractéristiques du matériau ce qui rend l'identification expérimentale très délicate.

Une troisième voie possible est de partir de l'élasticité caoutchoutique et, par une approche fonctionnelle, d'intégrer l'effet temporel. C'est cette voie que Christensen a exploré et que nous explicitons dans le paragraphe suivant.

## 1.5 Extension de l'élasticité: le modèle de Christensen

Ce modèle est une généralisation de l'élasticité caoutchoutique. En constatant que les modèles hyperélastiques sont une bonne approximation de l'élasticité caoutchoutique, Christensen [Christensen, 1980] a étendu ces modèles à la viscoélasticité.

### 1.5.1 Hypothèses du modèle

1. Matériau incompressible
2. Matériau isotrope
3. Température constante, loin de la transition vitreuse (état caoutchoutique)
4. Pour des processus suffisamment lents, la théorie viscoélastique se réduit à la théorie cinétique de l'élasticité caoutchoutique
5. La théorie viscoélastique est appliquée aux problèmes à contrainte imposée.

### 1.5.2 Loi de comportement

On part de la relation fonctionnelle générale, écrite sous forme intégrale [Green & Rivlin, 1957], reliant la contrainte de Cauchy à la déformation dans le cas incompressible:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & -p \delta_{ij} + x_{i,K} x_{j,L} \left[ g_0 \delta_{KL} + \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{\partial \Delta_{KL}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right. \\ \text{I.28} \quad & \left. + \delta_{KL} \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{\partial \Delta_{JJ}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \dots \right] \end{aligned}$$

$p$  est la pression hydrostatique.

Pour un matériau incompressible, Pipkin [Pipkin, 1964] a montré que la condition d'incompressibilité entraîne:

$$\text{tr} \underline{\underline{\Delta}} = \text{tr}(\underline{\underline{\Delta}}^2) - [\text{tr} \underline{\underline{\Delta}}]^2 + \dots$$

En ne retenant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 1, (I.28) devient:

$$\text{I.29} \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + x_{i,K} x_{j,L} \left[ g_0 \delta_{KL} + \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{\partial \Delta_{KL}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \dots \right]$$

Afin d'utiliser l'hypothèse 4, expliquons ce que l'on entend par processus lent [Gurtin & Herrera, 1965]. Soit une histoire de déformation donnée  $x_{i,K}(t)$  et  $\Delta_{KL}(t)$ . Une histoire retardée ou accélérée est spécifiée par  $\Delta_{KL}(\alpha t)$ , avec  $\alpha > 1$  pour un phénomène accéléré et  $\alpha < 1$  pour un phénomène retardé. Accélérer un processus revient à comprimer l'échelle du temps. Par conséquent, en changeant l'argument «temps» par l'argument réduit  $\frac{t}{\alpha}$ , on obtient, pour des histoires infiniment accélérées et retardées:

$$\text{I.30} \quad \begin{cases} \sigma_{ij} \left( \frac{t}{\alpha} \right)_{\text{accéléré}} = -p \delta_{ij} + x_{i,K} x_{j,L} [g_0 \delta_{KL} + g_1(0) \delta_{KL}(t) + \dots]_{\alpha \rightarrow \infty} \\ \sigma_{ij} \left( \frac{t}{\alpha} \right)_{\text{retardé}} = -p \delta_{ij} + x_{i,K} x_{j,L} [g_0 \delta_{KL} + g_1(\infty) \delta_{KL}(t) + \dots]_{\alpha \rightarrow 0} \end{cases}$$

L'hypothèse 4 stipule que pour des processus très lents, la théorie viscoélastique se ramène à la théorie cinétique de l'élasticité caoutchoutique. Or la théorie cinétique de l'élasticité caoutchoutique est incluse dans les relations (I.30) par la présence du terme  $g_0$ . Par conséquent, (I.30) conduit à  $g_1(\infty) \equiv 0$  de même que tous les termes d'ordre supérieur, soit:

$$\text{I.31} \quad g_n(\infty) \equiv 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Par conséquent les fonctions de relaxation décroissent vers 0 comme pour les fluides, sauf le premier terme  $g_0(\infty)$  qui est non nul et qui représente l'équilibre du solide.

Sachant que l'amplitude de la contrainte augmente avec la déformation  $\left( \frac{\partial |\underline{\sigma}|}{E}, \text{ où } E \text{ est l'amplitude de la déformation} \right)$  et lorsque l'histoire de déformation est accélérée  $\left( \frac{\partial g_1 \left( \frac{t-\eta}{\alpha} \right)}{\alpha} > 0 \right)$ , alors l'hypothèse 5 conduit à:

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = 0$$

qui signifie que la contrainte reste constante lorsque l'histoire de déformation est accélérée. La combinaison de tous ces résultats conduit à écrire que

$$\text{I.32} \quad \frac{dE}{d\alpha} < 0$$

c'est à dire que si l'amplitude de la contrainte est maintenue constante alors l'amplitude de l'histoire de déformation doit diminuer lorsque celle-ci est accélérée.

A partir de ces résultats, on peut tirer les conclusions suivantes:

- Pour les processus lents, les termes en intégrales de la relation (I.29) sont négligeables devant  $g_0$  en vertu de (I.31) et la théorie viscoélastique est sujette aux restrictions de la théorie élastique.

- Pour les processus rapides, (I.32) permet de montrer que l'amplitude de déformation doit être petite et, en conséquence, toutes les fonctionnelles d'ordre supérieur à 2 de (I.29) sont négligeables.

Donc, pour les processus lents et rapides, la loi de comportement s'écrit:

$$\text{I.33} \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + x_{i,K} x_{j,L} \left[ g_0 \delta_{KL} + \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{\partial \Delta_{KL}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right]$$

Cette relation, sous la condition  $g_1(\infty) \equiv 0$ , est une généralisation de la théorie cinétique de l'élasticité caoutchoutique pour modéliser le comportement viscoélastique. Il est à noter que cette théorie n'est pas simplement la théorie élastique à laquelle on a ajouté l'effet d'hérédité [Christensen, 1980].

Sous l'hypothèse des petites perturbations, la relation (I.33) devient:

$$\text{I.34} \quad \sigma_{ij} \cong -p \delta_{ij} + x_{i,K} x_{j,L} \left[ g_0 \delta_{KL} + 2 \int_0^t \mu(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right]$$

avec  $2\mu(t) = 2g_0 + g_1(t)$

Cette relation correspond à la théorie classique des petites déformations. On remarque que la théorie non linéaire contient les mêmes constantes du matériau que la théorie des petites déformations ce qui confère à la forme non linéaire (I.33) une utilité plus importante.

Cette théorie a certaines similitudes avec le modèle BKZ [Bernstein *et al.*, 1963]. Mais la principale différence réside dans le fait que la théorie BKZ est basée sur la prise en compte de plusieurs paramètres et fonctions pour caler sur une large gamme de données alors que le présent modèle est basé sur une généralisation viscoélastique de la théorie élastique.

Ce modèle présente néanmoins certaines limites puisque ces résultats ne sont exploitables que pour des essais de fluage et que les non linéarités sont purement cinématiques. De plus, cette théorie n'est valable que pour les matériaux isotropes incompressibles.

## 1.6 Conclusion

Dans tous ces modèles, on constate les mêmes limitations. Pour un développement d'ordre 1, ces modèles ne sont validés que pour des sollicitations simples (unidirectionnel, traction/relaxation). Dans des cas plus complexes de chargement, le passage de l'approche linéaire à l'approche non linéaire nécessite en général le développement des fonctionnelles à des ordres strictement supérieurs à 2. Un tel développement fait augmenter très rapidement le nombre de paramètres à identifier mais ne permet pas le calcul des énergies. De plus, les non linéarités sont, en général, purement cinématiques.

Par conséquent, le modèle que l'on développera devra être validé pour une large gamme d'essais, y compris des essais complexes. De plus, l'ordre du développement doit être faible de façon à ne pas engendrer un nombre trop élevé de paramètres à identifier.

## Chapitre 2

# Approche par variables d'état

Ces modèles supposent que l'histoire passée n'intervient que par la valeur actuelle d'un certain nombre de variables, les variables d'état, dont l'évolution est régie par une équation d'évolution [Sidoroff, 1975<sub>a</sub>]. Dans ce groupe, on réunit les modèles basés sur une approche par potentiels à l'image des travaux de Weber [Weber, 1968] et de Sidoroff [Sidoroff, 1976] ainsi que les principaux modèles rhéologiques tels que le modèle de Maxwell ou celui de Burger.

## 2.1 Les modèles rhéologiques

Les modèles rhéologiques que l'on va décrire ci-dessous correspondent à des matériaux viscoélastiques solides ou liquides. On peut trouver leur description dans [Germain, 1973], [Eringen, 1967], [Mandel, 1977]. Ces modèles sont obtenus en combinant des ressorts et des amortisseurs, permettant ainsi de donner une interprétation des différentes variables d'état apparaissant dans le modèle. On cherchera, à chaque fois, à choisir convenablement les variables d'état et on définira les potentiels d'énergie libre  $\Psi$  et de dissipation  $\phi$ . Le comportement d'un matériau est entièrement décrit par les variables d'état  $\underline{\underline{\chi}} = (\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\chi}}_2, \dots, \underline{\underline{\chi}}_r)$  et les fonctions convexes  $\Psi(\underline{\underline{\chi}})$  et  $\phi(\underline{\underline{\dot{\chi}}})$ . La loi d'évolution s'écrit:

$$\text{I.35} \quad \left( \underline{\underline{\sigma}} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}, \left( -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\chi}}_i} \right)_{i=2 \dots r} \right) \in \partial \phi(\underline{\underline{\dot{\chi}}})$$

où le sous-différentiel  $\partial \phi$  est défini par:

### ♥ Définition 2.1 Sous-différentiel

*Le sous-différentiel de  $\Psi$  en  $u$  est le sous-ensemble  $\partial \Psi(u)$  de l'espace topologique  $X^*$  dual de l'espace vectoriel  $X$  où est définie  $\Psi$ ; il est défini par [Le Tallec, 1990]:*

$$\partial\Psi(u) = \{u^* \in X^*, \langle u^*, v - u \rangle \leq \Psi(v) - \Psi(u), \forall v \in X\}$$

De plus, pour un amortisseur linéaire  $\eta_i$ , de déformation  $\varepsilon_i$ , le potentiel de dissipation  $\phi_i$  vaut:

$$\phi_i = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_i \eta_i \dot{\varepsilon}_i$$

### 2.1.1 Le modèle de Maxwell

Il est décrit par deux variables d'état, la déformation linéarisée totale ( $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ) et une déformation irréversible  $\underline{\underline{\varepsilon}}_i$ , qui peut être vue comme la déformation d'un amortisseur fictif contenu dans le matériau (figure 2.1).

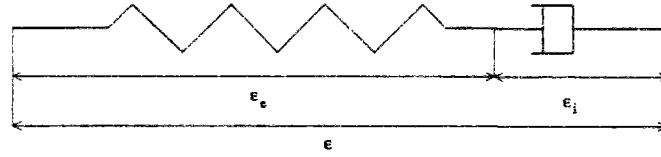


FIG. 2.1 - *Modèle rhéologique de Maxwell*

Avec ces variables, on peut définir le potentiel d'énergie libre  $\Psi$  et le potentiel de dissipation  $\phi$  par (en isotherme):

$$\Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_i) = \frac{1}{2\rho} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_i) : \underline{\underline{A}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_i) \quad \text{I.36}$$

$$\phi(\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_i, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_i) = \phi(\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_i)$$

où  $\underline{\underline{A}}$  est un tenseur d'élasticité d'ordre 4 défini positif.

Les lois de comportement s'écrivent, après élimination de  $\underline{\underline{\varepsilon}}_i$  et en supposant le tenseur d'élasticité  $\underline{\underline{A}}$  indépendant du temps:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_i = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{A}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{I.37}$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \underline{\underline{A}}^{-1} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \in \partial\phi^*(\underline{\underline{\sigma}})$$

où  $\partial\phi^*$  est le dual de  $\partial\phi$ .

**Remarque 2.1** *La notation tensorielle précédente est à prendre avec précaution. Dans le cas tridimensionnel, si le matériau est isotrope, on fait une décomposition des tenseurs en une partie volumétrique et une partie déviatorique. S'il est anisotrope, on se place dans les axes principaux.*



Cette loi est l'écriture classique (en particulier pour un traitement numérique) de la loi de comportement des matériaux viscoélastiques de Maxwell. Elle permet de prédire le comportement des matériaux de Maxwell soit en relaxation (évolution de la contrainte de traction en fonction du temps pour une elongation imposée) soit en fluage (évolution de la déformation en fonction du temps pour une contrainte imposée) (figure 2.2). On remarque un fluage infini, ce qui montre qu'un tel matériau se comporte comme un fluide.

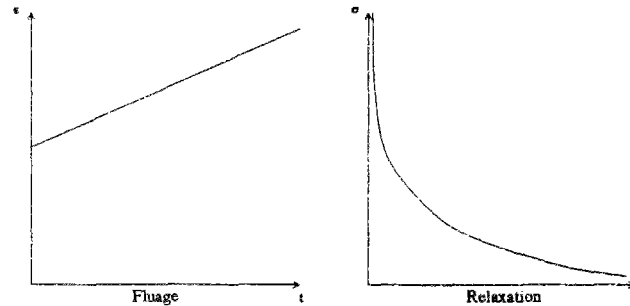


FIG. 2.2 - *Fluage et relaxation pour un matériau de Maxwell*

### 2.1.2 Le modèle de Burger généralisé

Ce modèle rhéologique est composé de ressorts et d'amortisseurs selon le schéma de la figure (2.3).

Il est obtenu en choisissant trois variables d'état:

- la déformation linéarisée totale  $\underline{\varepsilon}$
- les déformations irréversibles  $\underline{\varepsilon}_1$  et  $\underline{\varepsilon}_3$  associées à deux amortisseurs fictifs.

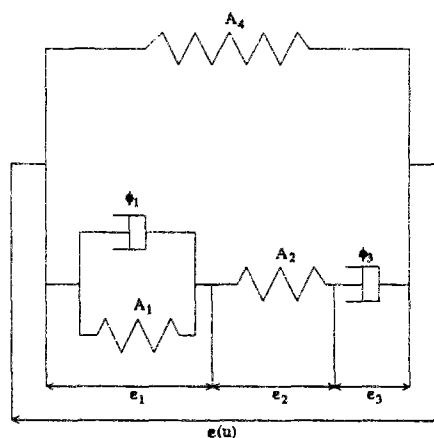


FIG. 2.3 - *Modèle rhéologique de Burger*

On définit alors, comme pour le matériau de Maxwell, le potentiel d'énergie libre  $\Psi$  et le potentiel de dissipation  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \Psi(\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}_1) &= \frac{1}{2\rho} \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{A}}_4 : \underline{\varepsilon} + \frac{1}{2\rho} \underline{\varepsilon}_1 : \underline{\underline{A}}_1 : \underline{\varepsilon}_1 \\ \text{I.38} \quad &+ \frac{1}{2\rho} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_3) : \underline{\underline{A}}_2 : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_3) \end{aligned}$$

$$\phi(\underline{\dot{\varepsilon}}, \underline{\dot{\varepsilon}}_1, \underline{\dot{\varepsilon}}_3) = \phi_1(\underline{\dot{\varepsilon}}_1) + \phi_3(\underline{\dot{\varepsilon}}_3)$$

Les lois de comportement s'écrivent alors, en vertu de la relation (I.35):

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} - \underline{\underline{A}}_4 : \underline{\varepsilon} - \underline{\underline{A}}_2 : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_3) &= 0 \\ \text{I.39} \quad -\underline{\underline{A}}_1 : \underline{\varepsilon}_1 + \underline{\underline{A}}_2 : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_3) &\in \partial\phi_1(\underline{\dot{\varepsilon}}_1) \\ \underline{\underline{A}}_2 : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_3) &\in \partial\phi_3(\underline{\dot{\varepsilon}}_3) \end{aligned}$$

On peut donc prédire le comportement en relaxation et en fluage pour de tels matériaux (figure 2.4). Dans ce cas, le fluage est limité ce qui montre que ce type de matériau se comporte comme un solide avec deux temps de relaxation différents.

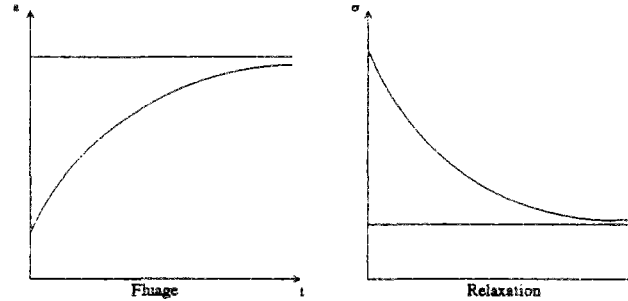


FIG. 2.4 - *Fluage et relaxation pour un matériau de Burger*

Ce modèle de Burger généralisé regroupe un certain nombre de cas particuliers comme le montre la figure 2.5.

### 2.1.3 Conclusion

Ces modèles rhéologiques ont l'inconvénient d'être limités aux cas des petites déformations en raison de la décomposition additive des différentes grandeurs constitutives.

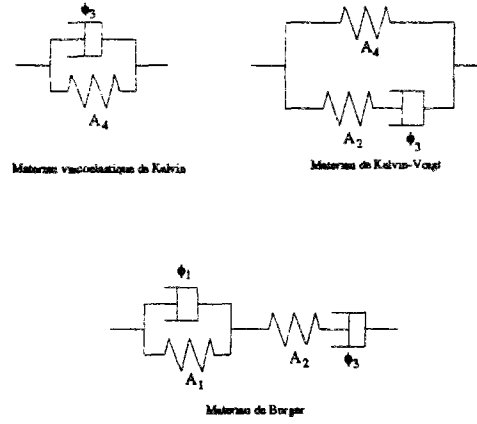


FIG. 2.5 - Cas particuliers du modèle de Burger

## 2.2 Le modèle de Weber

Weber [Weber, 1974] décrit les comportements viscoélastiques (ou viscoplastiques) par l'expression d'une énergie libre  $\Psi$  en fonction de la température, du tenseur de Cauchy-Green droit  $\underline{\underline{C}}$  et de variables d'état  $\chi_1, \chi_2 \dots \chi_N$ . Il effectue les hypothèses suivantes:

- les variables d'état sont les composantes d'un tenseur symétrique d'ordre 2,  $\underline{\underline{\chi}}$
- le matériau est isotrope
- le volume du matériau est égal à 1 dans toute configuration relâchée
- le milieu est isotherme

Il suppose que les variables d'état sont régies par la loi d'évolution:

$$\text{I.40} \quad \dot{\chi}_i = \frac{d\chi_i}{dt} = -\mathbb{C}_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial \chi_j}$$

alors que la contrainte de Piola-Kirchhoff 1 (ou tenseur de contrainte de Bousinesq)  $\underline{\underline{K}}$  est donnée par:

$$\text{I.41} \quad \underline{\underline{K}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{F}}}$$

Weber décompose le gradient de transformation  $\underline{\underline{F}}$  en une partie élastique  $\underline{\underline{F}}^e$  et une partie anélastique  $\underline{\underline{F}}^a$  ( $\det \underline{\underline{F}}^a = 1$ ) qui permet de passer de la configuration de référence à la configuration relâchée (voir Sidoroff [Sidoroff, 1974], [Sidoroff, 1975<sub>a</sub>], [Sidoroff, 1975<sub>b</sub>], [Sidoroff, 1976]). L'hypothèse d'isotropie des configurations relâchées conduit à identifier le tenseur  $\underline{\underline{\chi}}$  à  $\underline{\underline{F}}^{a^{-1}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}^{a^{-1}} = \underline{\underline{C}}^{a^{-1}}$ .

$\Psi$  est alors une fonction isotrope des tenseurs  $\underline{\underline{C}}$  et  $\underline{\underline{\chi}}$  et peut s'écrire sous la forme [Weber, 1974]:

$$\text{I.42} \quad \Psi(\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\chi}}) = \frac{\lambda}{2} (\xi - \eta)^2 + \mu \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Lambda}}^2)$$

avec:

$$\begin{cases} \xi &= \log [\det(\underline{\underline{F}})] \\ \eta &= \frac{\mu}{3\lambda} \log [\det(\underline{\underline{\chi}})] = 0 \text{ puisque } \det(\underline{\underline{\chi}}) = 1 \\ \underline{\underline{\Lambda}} &= \frac{1}{2} \log (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\chi}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}) \text{ tenseur de déformation logarithmique} \end{cases}$$

Par conséquent, la loi d'évolution du tenseur de variables d'état  $\underline{\underline{\chi}}$  s'écrit:

$$\text{I.43} \quad \dot{\underline{\underline{\chi}}} = -C \underline{\underline{\chi}} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\chi}}} \cdot \underline{\underline{\chi}}$$

où  $C$  est une fonction isotrope de  $\underline{\underline{\Lambda}}$  ou du tenseur de contrainte de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  à valeurs positives ou nulles. Si  $C$  est strictement positive, alors le comportement ainsi défini est celui d'un fluide viscoélastique, sinon, c'est celui d'un solide viscoplastique au sens de Weber (viscoélastique sans élasticité instantanée).

D'autre part, le comportement identifié par les relations (I.42) et (I.43) est conforme au principe d'objectivité, au second principe de la thermodynamique et au principe d'Onsager et est invariant dans tout changement de configuration de référence, à condition que le volume soit constant.

#### ◇ Limitations

Les limitations d'un tel modèle viennent du fait que le choix d'une seule variable d'état tensorielle peut s'avérer insuffisante pour la représentation des matériaux visqueux, et ce, au même titre que les modèles à un seul état intermédiaire.

## 2.3 Le modèle de Sidoroff

Sidoroff [Sidoroff, 1974] développe la notion d'état intermédiaire à partir de laquelle il construit une classe de milieux viscoélastiques non linéaires. Ces modèles généralisent aux grandes déformations les modèles rhéologiques classiques (Maxwell, Kelvin...). La configuration intermédiaire est définie comme une configuration relâchée, obtenue par une relaxation instantanée des contraintes, ce qui n'a de sens que pour les milieux à élasticité instantanée. Conformément à la

théorie des grandes déformations, il introduit, comme variable d'état, la déformation anélastique  $\underline{\underline{F}}^a$  (ou la déformation élastique  $\underline{\underline{F}}^e$ ), et décompose le gradient de transformation sous forme multiplicative (figure 2.6):  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^e \cdot \underline{\underline{F}}^a$

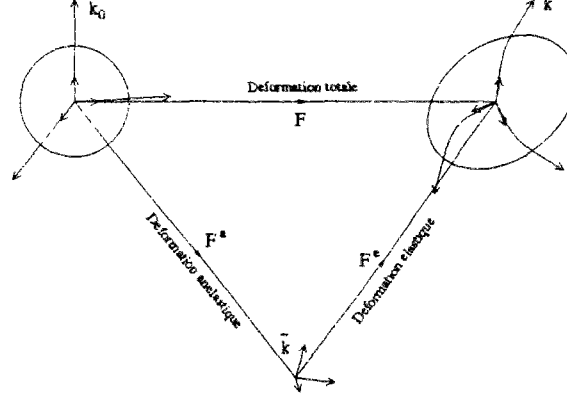


FIG. 2.6 - Configuration intermédiaire

L'énergie libre  $\Psi$  est alors fonction des variables  $(\underline{\underline{F}}, \theta)$ ,  $\theta$  étant la température, et de la variable d'état  $\underline{\underline{F}}^a$  (ou  $\underline{\underline{F}}^e$ ):

$$\text{I.44} \quad \Psi = \Psi(\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}^a, \theta)$$

Quant à l'inégalité de Clausius-Duhem, elle s'écrit:

$$\text{I.45} \quad \Phi = -\rho \left( \dot{\Psi} + s \dot{\theta} \right) + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{L}} - \frac{\underline{\underline{q}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \theta}{\theta} \geq 0$$

En remplaçant (I.44) dans (I.45), on obtient comme expression de la dissipation:

$$\text{I.46} \quad \Phi = \left( \underline{\underline{\sigma}} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{F}}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}} \right) : \underline{\underline{L}} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{F}}^a} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}^a : \underline{\underline{L}}^a - \frac{\underline{\underline{q}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \theta}{\theta} - \rho \left( s + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} \geq 0$$

où  $\underline{\underline{L}}^a = \dot{\underline{\underline{F}}}^a \cdot \underline{\underline{F}}^{a-1}$ .

Sidoroff [Sidoroff, 1974] suppose que les déformations (totale et anélastique) et la conduction thermique sont seules responsables de la dissipation. D'où:

$$\text{I.47} \quad \begin{cases} s = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ \Phi = \underline{\underline{\sigma}}^v : \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{\Sigma}}^a : \underline{\underline{L}}^a + \underline{\underline{J}}_q \cdot \underline{\underline{\nabla}} \theta \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{avec } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^e + \underline{\underline{\sigma}}^v, \underline{\underline{\sigma}}^e = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{F}}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\Sigma}}^a = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{F}}^a} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}^a, \underline{\underline{J}}_q = -\frac{\underline{\underline{q}}}{\theta}$$

En formalisme lagrangien, la dissipation  $\Phi$  se met sous la forme:

$$\text{I.48} \quad \Phi_0 = \frac{\rho_0}{\rho} \Phi = \underline{\underline{S}}^v : \underline{\underline{\dot{\Delta}}} + \underline{\underline{S}}^a : \underline{\underline{\dot{\Delta}}}^a + \underline{\underline{J}}_h \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} \theta \geq 0$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbb{S}}} = \underline{\underline{\mathbb{S}}}^e + \underline{\underline{\mathbb{S}}}^v, \underline{\underline{\mathbb{S}}}^e = 2\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{C}}}}, \underline{\underline{\mathbb{S}}}^a = -2\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{C}}}^a} \\ \underline{\underline{\Delta}}^a = \frac{1}{2} ({}^t \underline{\underline{\mathbb{F}}}^a \cdot \underline{\underline{\mathbb{F}}}^a - \underline{\underline{\mathbf{1}}}) \\ \underline{\text{grad}} \theta = {}^t \underline{\underline{\mathbb{F}}} \cdot \nabla \theta \\ \underline{\underline{\mathbf{J}}}_h = -\frac{\underline{\underline{h}}}{\theta}, \underline{\underline{h}} \text{ étant le flux de chaleur dans la configuration de référence} \end{array} \right.$$

alors qu'en formalisme eulérien, elle s'écrit:

$$\text{I.49} \quad \Phi = \underline{\underline{\sigma}}^v : \underline{\underline{\mathbb{D}}} + \underline{\underline{\sigma}}^a : \underline{\underline{\mathbb{D}}}^a + \underline{\underline{\mathbf{J}}}_q \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}} \geq 0$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}^e = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^v = 2\rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{B}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{B}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{B}}}^e} \cdot \underline{\underline{\mathbb{B}}}^e \right) \\ \underline{\underline{\sigma}}^a = 2\rho \underline{\underline{\mathbb{V}}}^e \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{V}}}^e} \cdot \underline{\underline{\mathbb{V}}}^e \\ \underline{\underline{\mathbb{D}}} \text{ tenseur taux de déformations} \\ \underline{\underline{\mathbb{D}}}^a \text{ tenseur taux de déformations anélastiques} \end{array} \right.$$

Grâce aux relations d'Onsager, on montre que, pour un milieu isotrope, il y a découplage entre les dissipations thermique et mécanique [Sidoroff, 1974]. La dissipation mécanique est une fonction scalaire isotrope des tenseurs  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}^e$ ,  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}^a$ , quadratique par rapport à  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}^a$ . On en conclut que le milieu isotrope le plus général est défini par 211 fonctions ( $\Psi$  et 210 fonctions reliant la dissipation mécanique aux variables tensorielles décrites précédemment et dont elle dépend) de 11 variables. Le nombre de ces fonctions diminue lorsque le matériau est supposé incompressible.

Sidoroff [Sidoroff, 1976] note cependant qu'un tel formalisme, bien que très approprié à une étude théorique, n'est pas le formalisme idéal pour des applications pratiques qui nécessitent le calcul explicite (et peu commode) de la décomposition polaire de  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}$  ( $\underline{\underline{\mathbb{F}}} = \underline{\underline{\mathbb{V}}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{R}}}$ ).

## 2.4 Viscoélasticité tridimensionnelle en déformations finies

Ce modèle, développé par Simo [Simo, 1987], est basé sur les caractéristiques suivantes:

- cas anisotrope

- découplage de la déformation en une partie volumétrique et une partie déviatorique: décomposition multiplicative du gradient de transformation
- pas de restriction sur les fonctions de relaxation
- recouvrement de l'élasticité finie pour les processus très lents et très rapides: par exemple, avec des modèles classiques de l'élasticité caoutchoutique (Mooney-Rivlin [Rivlin, 1951] ou Blatz-Ko [Brockman, 1986]).

### 2.4.1 Théorie linéaire

Soit  $\Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\chi}})$  l'énergie libre définie par:

$$\text{I.50} \quad \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\chi}}) = \Psi^0(\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) + \bar{\Psi}^0(\underline{\underline{e}}) - \underline{\underline{\chi}} : \underline{\underline{e}} + \Psi_I(\underline{\underline{\chi}})$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi^0(\text{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) : \text{partie volumétrique de l'énergie élastique initiale emmagasinée} \\ \bar{\Psi}^0(\underline{\underline{e}}) : \text{partie déviatorique de l'énergie élastique initiale emmagasinée} \\ \underline{\underline{e}} = \text{dev } [\underline{\underline{\varepsilon}}] : \text{déviateur du tenseur de déformation dans la configuration actuelle} \\ \underline{\underline{\chi}} : \text{tenseur des variables d'état} \\ \Psi_I : \text{potentiel interne, c'est à dire qui ne dépend que des variables d'état} \end{array} \right.$$

Le second principe de la thermodynamique donne:

$$\text{I.51} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\chi}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \equiv \underline{\underline{\sigma}}^0 - \underline{\underline{\chi}} \text{ avec } \underline{\underline{\sigma}}^0 = \frac{\partial \Psi^0(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

On obtient ainsi une décomposition additive du tenseur des contraintes en une contrainte initiale  $\underline{\underline{\sigma}}^0$  et une contrainte hors équilibre  $\underline{\underline{q}}$ .

### 2.4.2 Extension au cas non linéaire

Pour définir les réponses volumétrique et déviatorique dans le domaine non linéaire, on introduit la grandeur cinématique suivante [Simo, 1987]:

$$\underline{\underline{\mathbb{F}}} = J^{\frac{1}{3}} \bar{\underline{\underline{\mathbb{F}}}} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} J = \det \underline{\underline{\mathbb{F}}} \\ \bar{\underline{\underline{\mathbb{F}}}} = J^{-\frac{1}{3}} \underline{\underline{\mathbb{F}}} \end{array} \right.$$

On associe à  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}$  et  $\bar{\underline{\underline{\mathbb{F}}}}$  les tenseurs de Cauchy-Green droits correspondants  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$  et  $\bar{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}$  et les tenseurs de déformation lagrangiens  $\underline{\underline{\Delta}}$  et  $\bar{\underline{\underline{\Delta}}}$  respectivement:

$$\begin{cases} \bar{\underline{\underline{\mathbb{C}}}} &= J^{-\frac{2}{3}} \underline{\underline{\mathbb{C}}} \equiv {}^t\bar{\underline{\underline{\mathbb{F}}}} \cdot \bar{\underline{\underline{\mathbb{F}}}} \\ \bar{\underline{\underline{\Delta}}} &= \frac{1}{2} [\bar{\underline{\underline{\mathbb{C}}}} - \underline{\underline{\mathbb{I}}}] \end{cases}$$

où  $\underline{\underline{\mathbb{I}}}$  est le tenseur métrique dans la configuration de référence (en coordonnées cartésiennes,  $\mathbb{I}_{IJ} = \delta_{IJ}$ ).

Par analogie avec le cas linéaire, Simo [Simo, 1987] postule une fonction d'énergie libre  $\Psi(\underline{\underline{\Delta}}, \underline{\underline{\chi}})$  de la forme:

$$\text{I.52} \quad \Psi(\underline{\underline{\Delta}}, \underline{\underline{\chi}}) = \Psi^0(J) + \bar{\Psi}^0(\bar{\underline{\underline{\Delta}}}) - \underline{\underline{\chi}} : \bar{\underline{\underline{\Delta}}} + \Psi_I(\underline{\underline{\chi}})$$

L'inégalité de Clausius-Duhem  $\left(-\dot{\Psi} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\underline{\underline{\mathbb{C}}}} \geq 0\right)$  conduit à, dans le cas isotherme:

$$\text{I.53} \quad \begin{cases} - \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\Delta}}, \underline{\underline{\chi}})}{\partial \underline{\underline{\chi}}} : \dot{\underline{\underline{\chi}}} \geq 0 \\ \underline{\underline{\Pi}} = \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\Delta}}, \underline{\underline{\chi}})}{\partial \underline{\underline{\Delta}}} \end{cases}$$

Sachant que  $\frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\mathbb{C}}}} = \frac{J}{2} \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1}$ , on obtient:

$$\text{I.54} \quad \frac{\partial \bar{\underline{\underline{\Delta}}}}{\partial \underline{\underline{\Delta}}} \equiv \frac{\partial \bar{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}}{\partial \underline{\underline{\mathbb{C}}}} \equiv J^{-\frac{2}{3}} \left[ \underline{\underline{\mathbb{1}}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{\mathbb{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} \right]$$

Les relations (I.52), (I.53) et (I.54) conduisent à la loi de comportement suivante:

$$\text{I.55} \quad \underline{\underline{\Pi}} = Jp \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} + J^{-\frac{2}{3}} \text{DEV} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}^0(\bar{\underline{\underline{\Delta}}})}{\partial \bar{\underline{\underline{\Delta}}}} - \underline{\underline{\chi}} \right]$$

avec:

$$\begin{cases} p \equiv \frac{d\Psi^0(J)}{dJ} & \text{est la pression hydrostatique} \\ \text{DEV} [\cdot] = (\cdot) - \frac{1}{3} [\underline{\underline{\mathbb{C}}} : (\cdot)] \cdot \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} & \text{est le déviateur dans la configuration de référence} \end{cases}$$

De la même façon, on a:

$$\text{I.56} \quad \underline{\underline{\sigma}} = p \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \frac{1}{J} \text{dev} \left[ \bar{\underline{\underline{\mathbb{F}}}} \cdot \left\{ \frac{\partial \bar{\Psi}^0(\bar{\underline{\underline{\Delta}}})}{\partial \bar{\underline{\underline{\Delta}}}} - \underline{\underline{\chi}} \right\} \cdot {}^t\bar{\underline{\underline{\mathbb{F}}}} \right]$$



## 2.5 Le modèle viscohyperélastique

Ce modèle [Johnson *et al.*, 1991<sub>a</sub>] est basé sur le modèle solide de Maxwell généralisé dans lequel tous les ressorts sont hyperélastiques.

### 2.5.1 Le modèle linéaire de Maxwell généralisé pour les solides

On considère le modèle solide unidimensionnel de la figure 2.7.

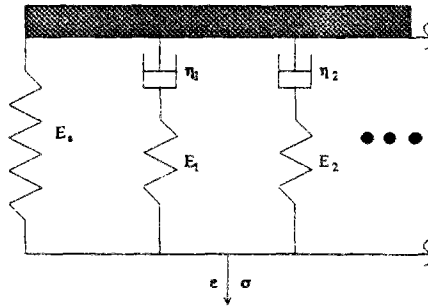


FIG. 2.7 - Modèle linéaire de Maxwell généralisé

Si on impose une déformation  $\underline{\varepsilon}_0$  à  $t = 0$ , on trouve comme contrainte:

$$\text{I.57} \quad \underline{\sigma}(t) = \underline{\varepsilon}_0 E_s + \underline{\varepsilon}_0 E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \underline{\varepsilon}_0 E_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \dots$$

où  $\tau_i = \frac{\eta_i}{E_i}$  est le  $i^{\text{ème}}$  temps de relaxation,  $E_i$  le module de dissipation du  $i^{\text{ème}}$  élément,  $\eta_i$  le coefficient du  $i^{\text{ème}}$  amortisseur,  $E_s$  le module d'élasticité à l'équilibre,  $\underline{\sigma}$  la contrainte mesurée et  $\underline{\varepsilon}$  la déformation mesurée. Les variables d'état sont les déformations anélastiques dans chaque élément. Le passage du modèle discret au continu se fait par la notion de spectre de fluage ou de relaxation. On peut alors écrire la contrainte sous la forme:

$$\text{I.58} \quad \underline{\sigma}(t) = \underline{\varepsilon}_0 E_s + \underline{\varepsilon}_0 \int_{\tau} E(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau$$

En posant,  $\psi(t) = \int_{\tau} E(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau$ , le problème discret à déformation imposée de la figure (2.8) a une contrainte donnée par:

$$\begin{aligned} \text{I.59} \quad \underline{\sigma}(t) &= \left( \Delta \underline{\varepsilon}_0 + \Delta \underline{\varepsilon}_1 H(t - t_1) + \dots \right) E_s \\ &+ \Delta \underline{\varepsilon}_0 \psi(t) + \Delta \underline{\varepsilon}_1 \psi(t - t_1) H(t - t_1) + \dots \end{aligned}$$

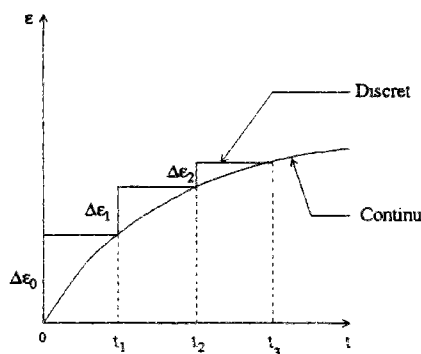


FIG. 2.8 - Déformation imposée discrète et continue

où  $H(t - a)$  est la fonction de Heaviside.

Lorsque les sauts de déformation (cas discret) deviennent très faibles, le problème continu de la figure (2.8) génère une contrainte donnée par:

$$\text{I.60} \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}_0 E_s + \int_0^t \phi(t - \xi) \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\xi)}{d\xi} d\xi$$

avec  $\phi(t - a) = \psi(t - a) H(t - a)$

### 2.5.2 Le modèle viscohyperélastique

On considère le modèle de Maxwell non linéaire à trois branches de la figure 2.9. L'élongation et la densité d'énergie de la branche élastique non linéaire sont respectivement  $\lambda_E$  et  $W_E$ . La densité d'énergie de l'élément dissipatif non linéaire est  $W_L$  et les constantes des amortisseurs non linéaires sont  $\eta_E$  et  $\eta_L$ . A chaque instant  $t$ , la contrainte totale  $\underline{\underline{\sigma}}$  est donnée par:

$$\text{I.61} \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\sigma}}_E(t) + \underline{\underline{\sigma}}_{\eta_E}(t) + \underline{\underline{\sigma}}_L(t)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}_E$  et  $\underline{\underline{\sigma}}_L$  sont les contraintes dans les branches élastique et dissipative (non linéaire) et  $\underline{\underline{\sigma}}_{\eta_E}$  la contrainte due à l'amortisseur non linéaire dans la branche de gauche (figure 2.9).

On suppose que les éléments non linéaires élastique et dissipatif sont régis par des densités d'énergie hyperélastique. Si la déformation est quasistatique, la branche sans amortisseur fournit la réponse hyperélastique non linéaire (à l'équilibre). Pour un essai de relaxation, l'élément dissipatif hyperélastique fournit une contrainte visqueuse supplémentaire à celle de l'équilibre.

Les différentes grandeurs sont déterminées à partir des résultats expérimentaux de Mc Guirt et Lianis [McGuirt & Lianis, 1970]. En traçant la courbe, pour un essai de relaxation d'élongation  $\lambda$ , représentant la somme des contraintes dans les éléments hyperélastiques et celle représentant la contrainte à l'équilibre, on

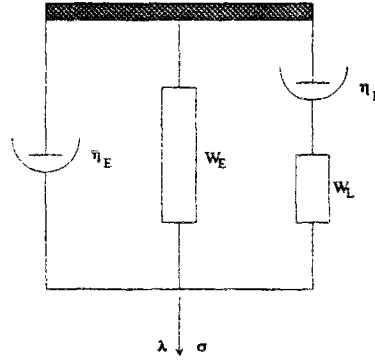


FIG. 2.9 - Modèle non linéaire de Maxwell

obtient la courbe de la contrainte dans l'élément dissipatif en fonction de l'élongation. Celle-ci étant approximativement une droite et l'élément de type Mooney-Rivlin (de densité d'énergie  $W = C_{10} (I_1^C - 3) + C_{01} (I_2^C - 3)$ ), Johnson et Quigley [Johnson *et al.*, 1991<sub>a</sub>] obtiennent l'expression approchée de la contrainte  $\sigma_L$  de l'élément dissipatif quand celui-ci subit une élongation  $\lambda_L$ :

$$\text{I.62} \quad \sigma_L = 2 \left( \lambda_L^2 - \frac{1}{\lambda_L} \right) \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda_L} \right)$$

Pour déterminer  $\eta_L$ , Johnson et Quigley [Johnson *et al.*, 1991<sub>a</sub>] procèdent de la façon suivante. A un instant donné  $t$ , ils considèrent les trois configurations de la figure 2.10 et déterminent les forces  $f$  et  $g$  par les relations:

$$\begin{cases} f = f_E + f_L \\ g = 2A_L \left( \lambda_g^2 - \frac{1}{\lambda_g} \right) \left( \frac{\partial W_L}{\partial I_1^C} + \frac{1}{\lambda_g} \frac{\partial W_L}{\partial I_2^C} \right) \end{cases}$$

avec

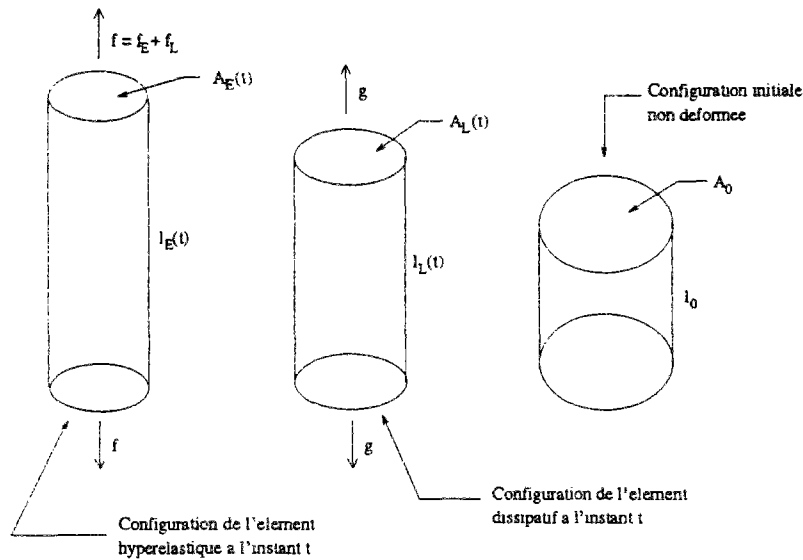
$$\text{I.63} \quad f_{i(i=E,L)} = 2A_i \left( \lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_i} \right) \left( \frac{\partial W_i}{\partial I_1^C} + \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial W_i}{\partial I_2^C} \right)$$

$\eta_L$  et  $\eta_E$  sont déterminés en supposant les lois d'évolution suivantes:

$$\text{I.64} \quad -\eta_L \frac{\partial g}{\partial l_L} \dot{l}_L = g$$

$$\text{I.65} \quad -\eta_E \frac{\partial f_E}{\partial l_E} \dot{l}_E = f_{\eta_E}$$

Une fois  $f_{\eta_E}$  déterminée, l'identification de  $\eta_L$  se fait en minimisant l'erreur (par balayage sur  $\eta_L$ ) entre la contrainte calculée et celle mesurée expérimentalement [McGuirt & Lianis, 1970].

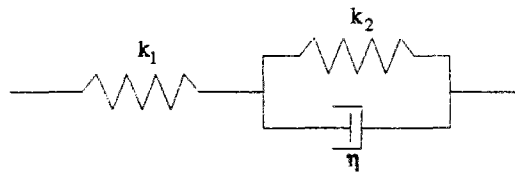
FIG. 2.10 - *Éléments hyperélastiques unidimensionnels*

## 2.6 Le modèle à cinq paramètres

Ce modèle est basé sur la généralisation du modèle à trois paramètres (viscoélasticité linéaire) pour la prise en compte des effets non linéaires et de la dépendance en temps des différents tenseurs. L'identification du modèle se fait par des essais de torsion sur un cylindre.

### 2.6.1 Le modèle à trois paramètres

On considère le modèle à trois paramètres de la figure 2.11 [Hausler & Sayir, 1995] (modèle de Zener).

FIG. 2.11 - *Le modèle à trois paramètres pour les solides*

En uniaxial, ce modèle est régi par l'équation suivante:

$$\text{I.66} \quad m \dot{\sigma} + \sigma = 2n \dot{\varepsilon} + 2c \varepsilon$$

où  $\sigma$  est la contrainte uniaxiale,  $\varepsilon$  la déformation infinitésimale correspondante et les coefficients  $m$ ,  $n$  et  $c$  dépendent des paramètres  $k_1$ ,  $k_2$  et  $\eta$  du modèle selon les relations:

$$m = \frac{\eta}{k_1 + k_2}, \quad 2n = \frac{k_2 \eta}{k_1 + k_2}, \quad 2c = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Afin de généraliser la relation (I.66) au cas tridimensionnel en déformations finies, on remplace la déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et sa dérivée par le tenseur de déformation  $\underline{\underline{\mathbb{G}}}$  et le tenseur taux de déformation  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}$  respectivement:

$$\text{I.67} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\mathbb{G}}} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbb{B}}} - \underline{\underline{\mathbb{1}}}) \\ \underline{\underline{\mathbb{D}}} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbb{L}}} + {}^t\underline{\underline{\mathbb{L}}}) \text{ avec } \underline{\underline{\mathbb{L}}} \text{ gradient de vitesse} \end{cases}$$

Le matériau étant supposé homogène, isotrope et incompressible, la loi de comportement s'écrit:

$$\text{I.68} \quad m \underline{\underline{\mathbb{T}}}^\circ + \underline{\underline{\mathbb{T}}} = 2n \underline{\underline{\mathbb{D}}} + 2c \underline{\underline{\mathbb{G}}}$$

avec  $\underline{\underline{\mathbb{T}}}$  tel que  $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\mathbb{T}}}$  où  $p$  est la pression hydrostatique et  $\underline{\underline{\mathbb{T}}}^\circ$  une des dérivées objectives de  $\underline{\underline{\mathbb{T}}}$ .

**Remarque 2.2** *Le passage du modèle en petites déformations à celui en grandes déformations est très approximatif, voire faux, car il suppose l'additivité des déformations et non une décomposition multiplicative.*

### 2.6.2 Identification expérimentale

Sur le cylindre de la figure 2.12, on applique un chargement en torsion. Les points du cylindre dans la configuration de référence en coordonnées cylindriques  $R, \Phi, Z$  sont transformés en points de coordonnées  $r, \phi, z$  en effectuant une rotation d'angle  $\alpha Z$  de chaque section perpendiculaire à l'axe  $Z$  (figure 2.12).

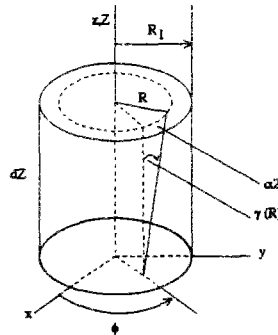


FIG. 2.12 - Essai de torsion d'un cylindre

La déformation est donnée par:

$$r = R \quad \phi = \Phi + \alpha Z \quad 0 \leq R \leq R_1 \quad 0 \leq \Phi \leq 2\pi \quad 0 \leq Z \leq H$$

Dans ce système de coordonnées, le gradient de transformation  $\underline{\underline{F}}$  s'écrit:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \gamma(R, t) = \alpha(t)R$$

Le moment de torsion  $M$  et la force normale  $N$  agissant sur le cylindre sont définis respectivement par:

$$\text{I.69} \quad M(t) = \int_0^{R_1} 2\pi R^2 T_{\phi z} dR, \quad N(t) = \int_0^{R_1} 2\pi R (T_{zz} - p) dR$$

Les différentes constantes du matériau sont déterminées par des essais en petites déformations, par la pente à l'origine du moment de torsion, par la variation de rigidité du matériau et par la réponse en temps.

### 2.6.3 Le modèle à cinq paramètres

Afin de faire apparaître la dépendance en temps du moment de torsion  $M$  et de la force normale  $N$ , on peut ajouter en parallèle au modèle à trois paramètres, un modèle de Maxwell. On obtient le modèle à cinq paramètres [Hausler & Sayir, 1995] de la figure 2.13.

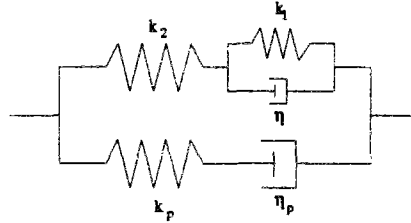


FIG. 2.13 - Le modèle à cinq paramètres

Dans le cas linéaire unidimensionnel, la contrainte  $\sigma_p$  ajoutée à  $\sigma$  (équation (I.66)) est définie par:

$$\text{I.70} \quad m_p \dot{\sigma}_p + \sigma_p = 2n_p \dot{\varepsilon} + 2c \varepsilon$$

On obtient, de la même façon, les expressions des moment et force additionnels  $M_p(t)$  et  $N_p(t)$ :

$$\text{I.71} \quad \begin{aligned} m_p \dot{M}_p + M_p &= n_{p0} \dot{\alpha} I_0 \\ m_p \dot{N}_p + N_p &= -m_p \dot{\alpha} M_p + \frac{\pi R_1^4}{4} (2 r \alpha \dot{\alpha} + s \dot{\alpha}^2) \end{aligned}$$

où  $I_0$  est une fonctionnelle de  $\alpha(t)$ .

Le moment  $M_t(t)$  et la force normale  $N_t(t)$  résultants sont alors donnés par:

$$M_t(t) = M(t) + M_p(t) \quad \text{et} \quad N_t(t) = N(t) + N_p(t)$$

### 2.6.4 Limitations

Ce modèle, bien que caractérisant le comportement viscoélastique non linéaire et le couplage entre la non linéarité et la réponse temporelle, présente les limitations suivantes:

- il y a 13 paramètres à identifier [Hausler & Sayir, 1995],
- le modèle n'a été validé que dans le cas de la torsion ce qui n'est pas suffisant pour établir sa validité pour d'autres modes expérimentaux,
- le passage petites déformations-grandes déformations est physiquement incorrect.

## 2.7 Conclusion

L'avantage de cette approche par variables d'état est le nombre limité de paramètres définissant le comportement viscoélastique. En revanche, ces modèles se divisent en deux groupes selon leurs limites. Les modèles rhéologiques sont purement unidirectionnels et s'appliquent plutôt à la viscoélasticité linéaire. Les modèles avec configuration intermédiaire sont pratiques dans le cas où une seule variable interne est suffisante, ce qui, comme constaté fréquemment d'un point de vue expérimental, est souvent insuffisant. La multiplicité des variables d'état, donc des configurations intermédiaires, complique énormément la démarche et rend l'identification expérimentale très périlleuse.

C'est pour ces raisons que nous adopterons une approche par potentiel pour développer notre modèle en prenant soin de limiter le nombre de paramètres à identifier.





## Conclusion de la première partie

Dans le cadre de cette revue bibliographique des différents modèles viscoélastiques, on a présenté les deux principales approches: l'approche fonctionnelle et l'approche par variables d'état. Nous avons montré les avantages et les inconvénients de chacune des deux approches en insistant sur l'identification expérimentale des paramètres des modèles et sur leurs applications à des matériaux réels.

Ainsi, les modèles basés sur une approche fonctionnelle ont l'avantage d'être applicable aux comportements non linéaires en grandes déformations mais sont difficilement identifiables dans la mesure où le nombre de paramètres à identifier, pour des comportements non linéaires, nécessite un nombre très élevé d'expériences.

Pour leur part, les modèles à variables d'état sont facilement identifiables en raison du nombre restreint de paramètres. En revanche, pour des comportements de matériaux réels, ce nombre doit être augmenté ce qui rend l'étude théorique très complexe. Ainsi, en fonction du comportement à approcher, le modélisateur pourra se référer à l'une ou l'autre des approches afin de simplifier au maximum l'étude théorique et l'identification expérimentale.

Le modèle que nous développons dans la partie suivante fait partie de la première catégorie de modèles. Il s'agit d'une approche fonctionnelle où le potentiel est écrit sous forme quadratique. Ceci nous assure que le nombre de paramètres à identifier est faible. De plus, l'identification d'une mesure linéarisante sous forme d'une fonction tensorielle isotrope du tenseur de Green-Lagrange nous assure la non linéarité du comportement.



## Deuxième partie

### Le modèle pseudo-linéaire



# Introduction

On se propose de développer un modèle viscoélastique non linéaire en grandes déformations. Ce modèle doit être construit de façon à inclure les comportements classiques tels que les comportements linéaires (de type BKZ), les comportements en petites déformations et les comportements hyperélastiques.

On se place dans le cadre d'une approche fonctionnelle au sens de Christensen [Christensen, 1968]. En effet, on postule une forme du potentiel d'énergie libre en fonction d'une mesure de déformation correctement choisie. Puis, à partir de l'inégalité de Clausius-Duhem, on déduit l'histoire de la contrainte en fonction de la déformation.

On se place dans le cadre de la mécanique classique des milieux continus en formalisme Lagrangien total. La base du modèle est donc de trouver une mesure de déformation  $\underline{\underline{E}}$  qui permette d'écrire le potentiel d'énergie libre  $\Psi$  sous forme quadratique, c'est à dire de linéariser la loi de comportement liant la contrainte à la déformation. On impose à cette mesure d'être une fonction tensorielle isotrope du tenseur de Cauchy-Green droit ou du tenseur de déformation de Green-Lagrange et d'être équivalente, aux petites déformations, à la mesure de déformation infinitésimale  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ .

L'originalité d'une telle approche réside dans le fait que la non linéarité du comportement n'augmente pas l'ordre du développement intégral (qui est d'ordre 1 pour les contraintes et d'ordre 2 pour les potentiels) puisque la non linéarité est implicitement incluse dans le choix de la mesure de déformation  $\underline{\underline{E}}$ . Sachant que la plupart des matériaux polymériques sont dissipatifs, un autre avantage du modèle pseudo-linéaire est d'avoir accès facilement à la dissipation, ce qui n'est pas toujours le cas des modèles évoqués dans la première partie.

Cette partie est articulée autour de six chapitres. Dans le chapitre 1, on présente les bases du modèle ainsi que les lois de comportement liant la contrainte à la déformation. L'identification du comportement d'un point de vue théorique, qui fait l'objet du même chapitre, se fait d'une part par équivalence aux petites déformations (pour les fonctions de relaxation) et d'autre part, par des essais de relaxation simple (pour la mesure de déformation). Toutefois, cette procédure d'identification se révèle être extrêmement complexe dans le cas général de matériaux anisotropes. Cela nous amène à nous limiter au cas des matériaux isotropes (chapitre 2) et de montrer que, dans ce cas, le lien avec les matériaux hyperélas-

tiques est immédiat (§2.6). Afin de valider le modèle (chapitre 3), nous avons effectué des simulations théoriques qui ont montré de bonnes concordances avec un matériau fictif identifié par un potentiel écrit sous forme d'un développement de Fréchet d'ordre 4. Enfin, une étude thermodynamique (chapitre 4) montre qu'un tel modèle permet aisément le calcul de la dissipation.

# Motivation

Plaçons-nous dans le cas isotrope et considérons, pour un essai de relaxation, un potentiel d'énergie libre écrit sous forme d'un développement de Fréchet à l'ordre 4. Celui-ci s'écrit:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi}(t) &= \frac{1}{2}r_1(t,t) \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Delta}})^2 + \frac{1}{2}r_2(t,t) \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Delta}}^2) + \frac{1}{3}r_3(t,t,t) \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Delta}})^3 \\
 &+ r_4(t,t,t) \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Delta}}^2) \cdot \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Delta}}) + \frac{1}{3}r_5(t,t,t) \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Delta}}^3) + \frac{1}{4}r_6(t,t,t,t) \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Delta}})^4 \\
 \text{II.1} \quad &+ \frac{1}{2}r_7(t,t,t,t) \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Delta}}^2) \cdot \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Delta}})^2 + \frac{1}{4}r_8(t,t,t,t) \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Delta}}^2)^2 \\
 &+ \frac{1}{3}r_9(t,t,t,t) \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Delta}}^3) \cdot \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Delta}})
 \end{aligned}$$

Supposons que les fonctions mémoire  $(r_i)_{i=1\dots 9}$  sont sous forme exponentielle et qu'un seul temps caractéristique  $\gamma$  intervient. Elles s'écrivent donc sous la forme:

$$\left. \begin{aligned} &(r_i)_{i=1,2}(t,t) \\ &(r_i)_{i=3\dots 5}(t,t,t) \\ &(r_i)_{i=6\dots 9}(t,t,t,t) \end{aligned} \right\} = r_{i\infty} + (r_{i0} - r_{i\infty}) e^{-c \cdot t}$$

Donc, le potentiel  $\tilde{\Psi}$  s'écrit:

$$\tilde{\Psi}(t) = \tilde{\Psi}_{\infty} + \left( \tilde{\Psi}_0 - \tilde{\Psi}_{\infty} \right) e^{-c \cdot t}$$

D'autre part, on peut récrire les potentiels initial et à l'équilibre en fonction des fonctions mémoire  $(r_{i0})_{i=1,2}$  et  $(r_{i\infty})_{i=1,2}$  sous la forme:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\infty} &= \frac{r_{1\infty} \left( r_{2\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{20} \tilde{\Psi}_{\infty} \right) - r_{2\infty} \left( r_{1\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{10} \tilde{\Psi}_{\infty} \right)}{r_{2\infty} r_{10} - r_{20} r_{2\infty}} \\ \tilde{\Psi}_0 &= \frac{r_{10} \left( r_{2\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{20} \tilde{\Psi}_{\infty} \right) - r_{20} \left( r_{1\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{10} \tilde{\Psi}_{\infty} \right)}{r_{2\infty} r_{10} - r_{20} r_{2\infty}} \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, le potentiel  $\tilde{\Psi}$  devient:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}(t) &= \frac{r_{1\infty} (r_{2\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{2_0} \tilde{\Psi}_\infty) - r_{2\infty} (r_{1\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{1_0} \tilde{\Psi}_\infty)}{r_{2\infty} r_{1_0} - r_{2_0} r_{2\infty}} \\
&+ \left( \frac{r_{1_0} (r_{2\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{2_0} \tilde{\Psi}_\infty) - r_{2_0} (r_{1\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{1_0} \tilde{\Psi}_\infty)}{r_{2\infty} r_{1_0} - r_{2_0} r_{2\infty}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{r_{1\infty} (r_{2\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{2_0} \tilde{\Psi}_\infty) - r_{2\infty} (r_{1\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{1_0} \tilde{\Psi}_\infty)}{r_{2\infty} r_{1_0} - r_{2_0} r_{2\infty}} \right) e^{-c \cdot t} \\
&= [r_{1\infty} + (r_{1_0} - r_{1\infty}) e^{-c \cdot t}] \frac{r_{2\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{2_0} \tilde{\Psi}_\infty}{r_{2\infty} r_{1_0} - r_{2_0} r_{2\infty}} \\
&- [r_{2\infty} + (r_{2_0} - r_{2\infty}) e^{-c \cdot t}] \frac{r_{1\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{1_0} \tilde{\Psi}_\infty}{r_{2\infty} r_{1_0} - r_{2_0} r_{2\infty}} \\
&= r_1(t) \frac{r_{2\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{2_0} \tilde{\Psi}_\infty}{r_{2\infty} r_{1_0} - r_{2_0} r_{2\infty}} - r_2(t) \frac{r_{1\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{1_0} \tilde{\Psi}_\infty}{r_{2\infty} r_{1_0} - r_{2_0} r_{2\infty}}
\end{aligned}$$

Donc, il existe une mesure de déformation  $\underline{\mathbb{E}}$  telle que:

$$\text{II.2} \quad \tilde{\Psi}(t) = r_1(t) (tr \underline{\mathbb{E}})^2 + r_2(t) (tr \underline{\mathbb{E}}^2)$$

avec:

$$\text{II.3} \quad \begin{cases} (tr \underline{\mathbb{E}})^2 = \frac{r_{2\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{2_0} \tilde{\Psi}_\infty}{r_{2\infty} r_{1_0} - r_{2_0} r_{2\infty}} \\ (tr \underline{\mathbb{E}}^2) = -\frac{r_{1\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{1_0} \tilde{\Psi}_\infty}{r_{2\infty} r_{1_0} - r_{2_0} r_{2\infty}} \end{cases}$$

Notons que cela reste vrai si le potentiel de Fréchet est écrit sous forme d'histoire de la déformation de Green-Lagrange. Donc, moyennant un choix judicieux de la mesure de déformation  $\underline{\mathbb{E}}$ , on montre que, pour des fonctions mémoire avec un seul temps caractéristique, un potentiel d'ordre 4 (relation II.1) est égal à un potentiel d'ordre 2 (relation II.2). Bien que dans la réalité, un seul temps caractéristique ne suffise pas pour décrire un comportement, cette remarque nous servira comme point départ de notre modèle. Nous postulons donc l'existence de la mesure  $\underline{\mathbb{E}}$  permettant d'écrire le potentiel d'énergie libre sous la forme II.2. Cela fait l'objet du chapitre suivant.



# Chapitre 1

## Formulation générale et identification dans le cas anisotrope

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on postule l'existence d'une mesure de déformation  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  permettant d'écrire le potentiel d'énergie libre sous forme quadratique. Par la suite, après avoir défini le tenseur de contrainte associé à la mesure de déformation  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ , on développe les lois de comportement à partir de l'inégalité de Clausius-Duhem. Après avoir donné la forme générale de la mesure de déformation ainsi que ses conditions d'existence, on développe la procédure d'identification des paramètres du modèle et ce, en deux phases:

- tenseur de relaxation: par équivalence aux petites déformations
- mesure de déformation: par des essais de relaxation pure.

On montre également les limites d'une telle identification dans le cas général des matériaux anisotropes.

### 1.2 Potentiel d'énergie libre

On se limite à l'étude d'un certain type de matériaux pour lesquels on suppose que ladite mesure de déformation  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  existe et est telle que le potentiel d'énergie libre soit linéaire au sens de Boltzmann, soit:

$$\text{II.4} \quad \rho_0 \Psi(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t - t_1 - t_2) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_2) dt_1 dt_2$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 : \text{masse volumique exprimée dans la configuration de référence} \\ \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \text{tenseur de relaxation d'ordre 4} \end{array} \right.$$

La mesure de déformation est recherchée sous la forme d'une fonction tensorielle isotrope du tenseur de déformation de Green-Lagrange.

### 1.3 Tenseur de contrainte

On associe à cette mesure de déformation  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  le tenseur de contrainte  $\underline{\underline{\mathbb{S}}}$  qui lui est énergétiquement associé:

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}}(t) = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t)$$

Par conséquent, si  $d\Omega_0$  est un élément de volume du domaine  $\Omega_0$  dans la configuration de référence, et sachant que  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  est une fonction tensorielle isotrope de  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$  ou de  $\underline{\underline{\Delta}}$  ( $\underline{\underline{\mathbb{E}}} = f(\underline{\underline{\Delta}})$  ou  $\underline{\underline{\mathbb{E}}} = g(\underline{\underline{\mathbb{C}}})$  où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continûment dérivables), on a, en notant  $\mathcal{P}$  la densité volumique de puissance:

$$\text{II.5} \quad \mathcal{P} d\Omega_0 = \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}} d\Omega_0 = \underline{\underline{\mathbb{S}}} : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}} d\Omega_0$$

Bien entendu, le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff 2 est défini, dans le cas isotherme, par la relation générale suivante:

$$\text{II.6} \quad \underline{\underline{\Pi}}(t) = \mathcal{F} \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\underline{\Delta}}(\tau) \\ -\infty \end{array} \right]$$

Le modèle que l'on veut définir doit inclure les comportements en petites déformations et les comportements viscoélastiques linéaires. Par conséquent, le tenseur de déformation  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  doit être équivalent, aux petites déformations, au tenseur de déformation linéarisée  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ .

### 1.4 Lois de comportement

Le potentiel d'énergie libre étant postulé par (II.4), nous allons vérifier si le processus ainsi défini est thermodynamiquement admissible, c'est à dire que la puissance dissipée  $\mathcal{D}$  est positive (inégalité de Clausius-Duhem). En formalisme

Lagrangien et dans l'hypothèse de grandes déformations isothermes, cette inégalité s'écrit [Mandel, 1977]:

$$\text{II.7} \quad \begin{cases} \mathcal{D}(t) = \underline{\underline{\Pi}}(t) : \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(t) - \rho_0 \dot{\Psi}(t) = \underline{\underline{\mathbb{S}}}(t) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t) - \rho_0 \dot{\Psi}(t) \\ \mathcal{D}(t) \geq 0, \forall \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t) \end{cases}$$

Dérivons par rapport au temps la relation (II.4):

$$\begin{aligned} \text{II.8} \quad \rho_0 \dot{\Psi}(t) &= \left[ \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t - t_1) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_1) dt_1 \right] : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t) \\ &+ \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{R}}}}(2t - t_1 - t_2) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \underline{\underline{\dot{\mathbb{R}}}}(u) = \frac{\partial \underline{\underline{\mathbb{R}}}}{\partial u}(u)$$

En substituant (II.8) dans l'équation (II.7), on obtient:

$$\begin{aligned} \text{II.9} \quad \mathcal{D}(t) &= \left[ \underline{\underline{\mathbb{S}}}(t) - \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t - t_1) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_1) dt_1 \right] : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t) \\ &- \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{R}}}}(2t - t_1 - t_2) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_2) dt_1 dt_2 \geq 0 \end{aligned}$$

L'inégalité de Clausius-Duhem doit être positive quelle que soit la valeur de  $\underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t)$  à chaque instant  $t$  de l'évolution, donc en particulier pour deux valeurs opposées de  $\underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t)$ . On obtient alors:

$$\text{II.10} \quad \left[ \underline{\underline{\mathbb{S}}}(t) - \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t - t_1) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_1) dt_1 \right] : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t) = 0$$

qui doit être vérifiée pour tout tenseur  $\underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t)$  symétrique. On en conclut:

$$\text{II.11} \quad \underline{\underline{\mathbb{S}}}(t) = \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t - t_1) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_1) dt_1$$

On obtient donc une loi de comportement linéaire reliant la contrainte  $\underline{\underline{\mathbb{S}}}$  à la déformation qui lui est thermodynamiquement associée  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  où le noyau  $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$  est un tenseur de relaxation. Ceci n'est cependant valable que si le tenseur de relaxation est une fonction positive et décroissante du temps. C'est généralement le cas car il

est souvent choisi sous forme exponentielle décroissante  $\left(\sum_i b_i \exp^{-c_i t}\right)$  ou sous forme puissance à exposant négatif  $\left(\sum_i b_i t^{-c_i}\right)^1$ .

Partant de la relation (II.5) et sachant que  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  est une fonction tensorielle isotrope de  $\underline{\underline{\Delta}}$ , on obtient la relation liant  $\underline{\underline{\Pi}}$  à  $\underline{\underline{\mathbb{S}}}$ :

$$\text{II.12} \quad \underline{\underline{\Pi}}(t) = \underline{\underline{\mathbb{S}}}(t) : \left[ {}^t \left( \frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}} \right) \right](t)$$

Par conséquent, les lois de comportement dans le cas compressible et la puissance dissipée, issues du second principe de la thermodynamique, s'écrivent:

$$\text{II.13} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\mathbb{S}}}(t) = \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t - t_1) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_1) dt_1 \\ \underline{\underline{\Pi}}(t) = \left[ \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t - t_1) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_1) dt_1 \right] : \frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}}(t) \\ \mathcal{D}(t) = - \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t - t_1 - t_2) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_2) dt_1 dt_2 \end{cases}$$

Dans le cas incompressible, la contrainte de Piola-Kirchhoff 2 s'écrit:

$$\text{II.14} \quad \underline{\underline{\Pi}}(t) = \left[ \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t - t_1) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_1) dt_1 \right] : \frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}}(t) + p(t) \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1}(t)$$

Ainsi, l'identification du comportement thermodynamiquement admissible, qui est étudiée au paragraphe suivant, se réduit à la détermination du tenseur de déformation linéarisant  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}(\underline{\underline{\Delta}})$  et du tenseur de relaxation d'ordre 4  $\underline{\underline{\mathbb{R}}}(t)$ .

## 1.5 Forme générale de la mesure de déformation

On a vu dans le paragraphe 1.3 que l'on choisissait  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  sous forme d'une fonction tensorielle isotrope de  $\underline{\underline{\Delta}}$ , définie sur l'ensemble des tenseurs symétriques d'ordre 2. Par conséquent, on peut écrire la forme générale pour  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  [Serrin, 1959]:

$$\text{II.15} \quad \underline{\underline{\mathbb{E}}} = a_0(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) \underline{\underline{\mathbb{1}}} + a_1(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) \underline{\underline{\Delta}} + a_2(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) \underline{\underline{\Delta}}^2$$

où  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont des fonctions continues et continûment dérivables de trois invariants de  $\underline{\underline{\Delta}}$ ,  $I_1^\Delta$ ,  $I_2^\Delta$ ,  $I_3^\Delta$ . On a vu également (paragraphe 1.3) que  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  devait être équivalente, aux petites déformations, au tenseur linéarisé  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ .

---

1. Dans les deux cas, les paramètres  $b_i$  et  $c_i$  sont positifs

◇ Conditions sur  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$ 

En prenant  $I_1^\Delta = \text{tr}(\underline{\underline{\Delta}})$ ,  $I_2^\Delta = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\Delta}}^2)$  et  $I_3^\Delta = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\Delta}}^3)$ , l'équivalence entre  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  aux petites déformations impose sur  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  les conditions suivantes:

- Première condition: les fonctions doivent être bornées de façon à ce que la déformation ne diverge pas lors du passage aux limites

**II.16**  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  bornées au voisinage de  $\underline{\underline{\Delta}} \approx \underline{\underline{\varepsilon}}$ 

Cette condition est naturellement vérifiée du fait que les  $(a_i)_{i=0\dots 2}$  sont  $C^1$ .

- Deuxième condition: équivalence de  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  aux petites déformations

$$\text{II.17} \quad \underline{\underline{\mathbb{E}}}(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) \approx \underline{\underline{\varepsilon}} \iff \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{I_1^\Delta \rightarrow 0 \\ I_2^\Delta \rightarrow 0 \\ I_3^\Delta \rightarrow 0}} a_0(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = 0 \\ \lim_{\substack{I_1^\Delta \rightarrow 0 \\ I_2^\Delta \rightarrow 0 \\ I_3^\Delta \rightarrow 0}} a_1(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = 1 \end{array} \right.$$

- Troisième condition: équivalence de la dérivée de  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$

$$\text{II.18} \quad \lim_{\substack{I_1^\Delta \rightarrow 0 \\ I_2^\Delta \rightarrow 0 \\ I_3^\Delta \rightarrow 0}} \frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}}(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = \underline{\underline{\mathbf{1}}} \iff \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{I_1^\Delta \rightarrow 0 \\ I_2^\Delta \rightarrow 0 \\ I_3^\Delta \rightarrow 0}} \frac{\partial a_0}{\partial I_1}(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = 0 \\ \lim_{\substack{I_1^\Delta \rightarrow 0 \\ I_2^\Delta \rightarrow 0 \\ I_3^\Delta \rightarrow 0}} a_1(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = 1 \end{array} \right.$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{1}}}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ .

En revanche, il n'y a aucune condition sur  $a_2$  ainsi que sur les autres dérivées puisque, dans l'hypothèse des petites perturbations,  $\underline{\underline{\Delta}}^2$  est un infiniment petit du second ordre.

On suppose, dans la suite, que toutes les fonctionnelles sont continues et différentiables au sens de Fréchet [Hassani *et al.*, 1997].

## 1.6 Identification du tenseur de relaxation

L'identification du tenseur de relaxation  $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$  se fait par équivalence aux petites déformations. En effet, dans ce cas, le potentiel pseudo-linéaire est équivalent à:

$$\text{II.19} \quad \Psi_{eq}(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}} (2t - t_1 - t_2) : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}(t_2) dt_1 dt_2$$

Il suffit alors de considérer des cas particuliers de chargements en petites déformations, selon le nombre de coefficients indépendants de  $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$  pour pouvoir identifier complètement le tenseur. Dans le cas isotrope compressible, par exemple, deux essais suffisent.

**Remarque 1.1** *Cette méthode d'identification du tenseur de relaxation est exacte si le matériau est rigoureusement pseudo-linéaire. Si le comportement ne l'est pas mais que l'on cherche à l'approcher par un comportement pseudo-linéaire, cette technique nous conduira vers un tenseur de relaxation qui, au voisinage de la déformation désirée, ne sera pas exact puisqu'il aura été identifié au voisinage des petites déformations. En pratique, il faudra, après avoir identifié la mesure de déformation, apporter une correction sur le tenseur de relaxation.*

## 1.7 Identification de la mesure linéarisante

Dans ce paragraphe, on suppose que le tenseur de relaxation a été identifié par la méthode décrite au paragraphe précédent. Nous allons identifier la mesure linéarisante par des essais de relaxation. Imposons-nous une déformation de la forme  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}(t) = \tilde{\underline{\underline{\mathbb{E}}}} H(t)$  où  $H(t)$  est la fonction de Heaviside définie par:

$$\text{II.20} \quad H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Par conséquent, la relation (II.4) se réduit à:

$$\text{II.21} \quad \Psi(t) = \frac{1}{2} \tilde{\underline{\underline{\mathbb{E}}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t) : \tilde{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}$$

L'identification de la mesure linéarisante se fait aux temps courts (élasticité instantanée) et aux temps longs (équilibre). Utilisons les potentiels initial et à l'équilibre  $\Psi_0$  et  $\Psi_\infty$  respectivement, valeurs limites en 0 et à l'infini du potentiel d'énergie libre  $\Psi$ . Les relations (II.4) et (II.21) conduisent alors à:

$$\text{II.22} \quad \begin{cases} \Psi_0 = \frac{1}{2} \tilde{\underline{\underline{\mathbb{E}}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_0 : \tilde{\underline{\underline{\mathbb{E}}}} \\ \Psi_\infty = \frac{1}{2} \tilde{\underline{\underline{\mathbb{E}}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_\infty : \tilde{\underline{\underline{\mathbb{E}}}} \end{cases}$$

où on a noté  $\Psi_i = \lim_{t \rightarrow i} \Psi(t)$  et  $\underline{\underline{\mathbb{R}}}_i = \lim_{t \rightarrow i} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t)$ .

Etant donnée la forme de la mesure linéarisante (relation (II.15)), qui suppose trois inconnues ( $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$ ), il faudrait connaître le potentiel d'énergie libre  $\Psi$  à un instant  $t_0$  différent de 0 et de l'infini. Un tel potentiel s'écrirait, par analogie avec (II.22):

$$\text{II.23} \quad \Psi_{t_0} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbb{E}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{t_0}} : \underline{\underline{\mathbb{E}}}$$

**Remarque 1.2** *Il s'agit ici d'une étude théorique car, en pratique, nous n'avons pas accès à  $\Psi(t)$ . En revanche, on connaît les histoires de  $\Pi(t)$  et de  $\Delta(t)$  lors d'un quelconque essai. On peut alors, par intégration de la courbe (effort-déformation) pour un essai convenablement choisi, déterminer le potentiel d'énergie libre.*

En substituant (II.15) dans (II.22) et (II.23), on obtient le système suivant en  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$ :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} 2 \Psi_0 (\underline{\underline{\Delta}}) = a_0^2 \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_0} : \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2 a_0 a_1 \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_0} : \underline{\underline{\Delta}} + 2 a_0 a_2 \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_0} : \underline{\underline{\Delta}}^2 \\ \quad + a_1^2 \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_0} : \underline{\underline{\Delta}} + 2 a_1 a_2 \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_0} : \underline{\underline{\Delta}}^2 + a_2^2 \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_0} : \underline{\underline{\Delta}} \\ 2 \Psi_{t_0} (\underline{\underline{\Delta}}) = a_0^2 \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{t_0}} : \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2 a_0 a_1 \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{t_0}} : \underline{\underline{\Delta}} + 2 a_0 a_2 \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{t_0}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 \\ \quad + a_1^2 \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{t_0}} : \underline{\underline{\Delta}} + 2 a_1 a_2 \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{t_0}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 + a_2^2 \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{t_0}} : \underline{\underline{\Delta}} \\ 2 \Psi_{\infty} (\underline{\underline{\Delta}}) = a_0^2 \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\infty}} : \underline{\underline{\mathbb{1}}} + 2 a_0 a_1 \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\infty}} : \underline{\underline{\Delta}} + 2 a_0 a_2 \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\infty}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 \\ \quad + a_1^2 \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\infty}} : \underline{\underline{\Delta}} + 2 a_1 a_2 \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\infty}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 + a_2^2 \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\infty}} : \underline{\underline{\Delta}} \end{array} \right.$$

Ce système de trois équations à trois inconnues ( $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$ ) est non linéaire d'ordre 2 ce qui rend sa résolution extrêmement complexe. Nous allons néanmoins tenter de le résoudre dans le paragraphe suivant.

## 1.8 Résolution du système (S)

Le système (S) étant extrêmement non linéaire, on peut, moyennant la connaissance du potentiel d'énergie libre à d'autres instants, changer d'inconnues pour se ramener à un système linéaire de six équations à six inconnues. En notant les nouvelles inconnues  $x = a_0^2$ ,  $y = 2 a_0 a_1$ ,  $z = 2 a_0 a_2$ ,  $t = a_1^2$ ,  $u = 2 a_1 a_2$  et  $v = a_2^2$ , le système devient:





avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\underline{\underline{\mathbf{A}}}] = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} \\ \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} \\ \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} \\ \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} \\ \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} \\ \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} \end{bmatrix} \\ {}^t\{\underline{\underline{\mathbf{X}}}\} = \{x \ y \ z \ t \ u \ v\} \\ {}^t\{\underline{\underline{\mathbf{B}}}\} = \{2 \ \Psi_0 \ 2 \ \Psi_{t_0} \ 2 \ \Psi_{t_1} \ 2 \ \Psi_{t_2} \ 2 \ \Psi_{t_3} \ 2 \ \Psi_{\infty}\} \end{array} \right.$$

La matrice  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  est pleine et non symétrique.

En revanche, étant donnée la symétrie du tenseur de relaxation

$$\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{ijkl} = \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{klij}$$

on a:

$$\underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2$$

La matrice  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  est donc singulière et son déterminant est nul. Cela signifie que les variables  $u$  et  $v$  sont liées. On peut alors récrire ce système en remplaçant les variables  $u$  et  $v$  par une seule variable  $s = u + v$ , ce qui donne:

$$\text{II.25} \quad [\underline{\underline{\mathbf{A}}'}] \cdot \{\underline{\underline{\mathbf{X}}'}\} = \{\underline{\underline{\mathbf{B}}'}\}$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\underline{\underline{\mathbf{A}}'}] = \begin{bmatrix} \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} \\ \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} \\ \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} \\ \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} \\ \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\Delta}} \end{bmatrix} \\ {}^t\{\underline{\underline{\mathbf{X}}'}\} = \{x \ y \ z \ t \ s\} \\ {}^t\{\underline{\underline{\mathbf{B}}'}\} = \{2 \ \Psi_0 \ 2 \ \Psi_{t_0} \ 2 \ \Psi_{t_1} \ 2 \ \Psi_{t_2} \ 2 \ \Psi_{\infty}\} \end{array} \right.$$

Dans ce cas et sous certaines conditions sur le tenseur de relaxation  $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$ , la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{A}}'}$  est inversible et on peut obtenir la solution du système (II.25) à l'aide du logiciel de calcul formel **MATHEMATICA®**. Après avoir trouvé les solutions  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ ,  $s$  du système (II.25), afin d'obtenir les solutions  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  du système  $\mathcal{S}$ , nous devons résoudre le système de trois équations à trois inconnues:

$$\text{II.26} \quad \begin{cases} 2 a_0 a_1 & = y \\ 2 a_0 a_2 & = z \\ 2 a_1 a_2 + a_2^2 & = s \end{cases}$$

avec les conditions de compatibilités

$$\text{II.27} \quad \begin{cases} a_0^2 & = x \\ a_1^2 & = t \end{cases}$$

La résolution du système (II.26) conduit aux trois solutions suivantes:

$$\text{II.28} \quad \begin{cases} a_0^2 & = \frac{z \cdot (2 y + z)}{4 s} \\ a_1^2 & = \frac{y^2 \cdot s}{z \cdot (2 y + z)} \\ a_2^2 & = \frac{z \cdot s}{2 y + z} \end{cases}$$

Or, ce triplet  $\{a_0, a_1, a_2\}$  est incompatible avec (II.27) puisque le calcul avec **MATHEMATICA®** montre que:

$$\text{II.29} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{z \cdot (2y + z)}{4s} \neq x \\ \frac{y^2 \cdot s}{z \cdot (2y + z)} \neq t \end{array} \right.$$

On en conclut que l'on ne peut pas trouver, dans le cas général, une mesure linéarisante sous la forme (II.15).

On peut néanmoins changer de problème et chercher les conditions sur  $\Psi_0$  et  $\Psi_\infty$  pour que l'on ait

$$\text{II.30} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{z \cdot (2y + z)}{4s} = x \\ \frac{y^2 \cdot s}{z \cdot (2y + z)} = t \end{array} \right.$$

Ce calcul reste néanmoins complexe car extrêmement non linéaire et **MATHEMATICA®** ne parvient pas à converger.

Cela nous contraint à simplifier l'étude et on peut, sans trop perdre de généralité, supposer le matériau isotrope. Cette étude fait l'objet du chapitre suivant.



## Chapitre 2

# Matériaux isotropes

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on développe les mêmes étapes que celles du chapitre précédent. L'isotropie du matériau nous permet d'aller au bout de l'identification, c'est à dire à l'obtention des formes des fonctions  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$ . En guise d'exemple, on développe la procédure d'identification dans le cas où la mesure linéarisante choisie est écrite sous forme d'une mesure de Seth [Seth, 1964].

### 2.2 Choix du tenseur de relaxation

Revenons au potentiel d'énergie libre et à la mesure linéariante définis respectivement par les relations (II.21) et (II.15). L'isotropie du matériau, ajoutée à celle de la relation reliant  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  à  $\underline{\underline{\Delta}}$  imposent un tenseur de relaxation de la forme:

$$\text{II.31} \quad \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t) = \lambda(t) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu(t) \underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

où  $\otimes$  représente le produit tensoriel,  $\lambda(t)$  et  $\mu(t)$  sont des fonctions du matériau positives et décroissantes du temps et

$$\left\{ \begin{array}{l} (\underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{1}}})_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} \\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{array} \right.$$

Le potentiel d'énergie libre s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \text{II.32} \quad \rho_0 \Psi(t) = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \left[ \lambda(2t - t_1 - t_2) \left[ \text{tr} \left( \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_1) \right) \right]^2 \right. \\ & \left. + 2\mu(2t - t_1 - t_2) \text{tr} \left( \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}^2(t_2) \right) \right] dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

## 2.3 Lois de comportement

L'équation de comportement s'écrit alors, pour les matériaux compressibles:

$$\text{II.33} \quad \underline{\underline{\Pi}}(t) = \left( \int_{-\infty}^t \left[ \lambda(t-t') \operatorname{tr} \left( \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t') \right) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu(t-t') \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t') \right] dt' \right) : \frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}}(t)$$

Si on ajoute une contrainte interne d'incompressibilité, la loi de comportement devient:

$$\underline{\underline{\Pi}}(t) = \left( \int_{-\infty}^t \left[ \lambda(t-t') \operatorname{tr} \left( \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t') \right) \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu(t-t') \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t') \right] dt' \right) : \frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}}(t) + p(t) \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1}(t)$$

où  $p$  est un multiplicateur de Lagrange défini par les conditions aux limites et par l'équilibre.

## 2.4 Choix de la mesure de déformation et identification

On limite l'identification du comportement aux matériaux isotropes et compressibles. Celle-ci se faisant pour des essais de relaxation, on écrit le potentiel d'énergie libre sous la forme suivante, en substituant (II.31) dans (II.21):

$$\text{II.34} \quad \Psi(t) = \frac{1}{2} \left[ \lambda(t) [\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbb{E}}}]^2 + 2\mu(t) \operatorname{tr} (\underline{\underline{\mathbb{E}}}^2) \right]$$

et où  $\lambda(t)$  et  $\mu(t)$ , qui définissent le tenseur de relaxation, sont déterminées par des essais en petites déformations.

En substituant (II.31) dans le système ( $\mathcal{S}$ ), on obtient le nouveau système suivant:

$$(\mathcal{S}_1) \left\{ \begin{array}{l} 2 \Psi_0 = \left[ 9a_0^2 + 6a_0a_1I_1^\Delta + a_1^2I_1^{\Delta^2} + 12a_0a_2I_2^\Delta + 4a_1a_2I_1^\Delta I_2^\Delta + 4a_2^2I_2^{\Delta^2} \right] \lambda_0 \\ \quad + \left[ 3a_0^2 + 2a_0a_1I_1^\Delta + 2(a_1^2 + 2a_0a_2)I_2^\Delta + 6a_1a_2I_3^\Delta + a_2^2 \operatorname{tr} (\underline{\underline{\Delta}}^4) \right] \mu_0 \\ 2 \Psi_{t_0} = \left[ 9a_0^2 + 6a_0a_1I_1^\Delta + a_1^2I_1^{\Delta^2} + 12a_0a_2I_2^\Delta + 4a_1a_2I_1^\Delta I_2^\Delta + 4a_2^2I_2^{\Delta^2} \right] \lambda_{t_0} \\ \quad + \left[ 3a_0^2 + 2a_0a_1I_1^\Delta + 2(a_1^2 + 2a_0a_2)I_2^\Delta + 6a_1a_2I_3^\Delta + a_2^2 \operatorname{tr} (\underline{\underline{\Delta}}^4) \right] \mu_{t_0} \\ 2 \Psi_\infty = \left[ 9a_0^2 + 6a_0a_1I_1^\Delta + a_1^2I_1^{\Delta^2} + 12a_0a_2I_2^\Delta + 4a_1a_2I_1^\Delta I_2^\Delta + 4a_2^2I_2^{\Delta^2} \right] \lambda_\infty \\ \quad + \left[ 3a_0^2 + 2a_0a_1I_1^\Delta + 2(a_1^2 + 2a_0a_2)I_2^\Delta + 6a_1a_2I_3^\Delta + a_2^2 \operatorname{tr} (\underline{\underline{\Delta}}^4) \right] \mu_\infty \end{array} \right.$$

$\Psi_0$ ,  $\Psi_{t_0}$  et  $\Psi_\infty$  sont définis par (II.22), (II.23) et (II.34):

$$\text{II.35} \quad \Psi_0 = \frac{1}{2} \left[ \lambda_0 \left[ \text{tr } \underline{\underline{\mathbb{E}}} \right]^2 + 2 \mu_0 \text{tr } (\underline{\underline{\mathbb{E}}}^2) \right]$$

$$\text{II.36} \quad \Psi_{t_0} = \frac{1}{2} \left[ \lambda_{t_0} \left[ \text{tr } \underline{\underline{\mathbb{E}}} \right]^2 + 2 \mu_{t_0} \text{tr } (\underline{\underline{\mathbb{E}}}^2) \right]$$

$$\text{II.37} \quad \Psi_\infty = \frac{1}{2} \left[ \lambda_\infty \left[ \text{tr } \underline{\underline{\mathbb{E}}} \right]^2 + 2 \mu_\infty \text{tr } (\underline{\underline{\mathbb{E}}}^2) \right]$$

où  $\lambda_0$ ,  $\lambda_{t_0}$ ,  $\lambda_\infty$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu_{t_0}$ ,  $\mu_\infty$  représentent les valeurs en 0,  $t_0$  et à l'infini de  $\lambda(t)$  et  $\mu(t)$  respectivement.

Le système  $(\mathcal{S}_1)$  peut se réécrire:

$$\text{II.38} \quad \begin{cases} 2 \Psi_0 &= A(a_0, a_1, a_2) \lambda_0 + B(a_0, a_1, a_2) \mu_0 \\ 2 \Psi_{t_0} &= A(a_0, a_1, a_2) \lambda_{t_0} + B(a_0, a_1, a_2) \mu_{t_0} \\ 2 \Psi_\infty &= A(a_0, a_1, a_2) \lambda_\infty + B(a_0, a_1, a_2) \mu_\infty \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} A(a_0, a_1, a_2) &= 9a_0^2 + 6a_0a_1I_1^\Delta + a_1^2I_1^{\Delta^2} + 12a_0a_2I_2^\Delta + 4a_1a_2I_1^\Delta I_2^\Delta + 4a_2^2I_2^{\Delta^2} \\ B(a_0, a_1, a_2) &= 3a_0^2 + 2a_0a_1I_1^\Delta + 2(a_1^2 + 2a_0a_2)I_2^\Delta + 6a_1a_2I_3^\Delta + a_2^2 \text{tr } (\underline{\underline{\Delta}}^4) \end{cases}$$

On constate, à partir de (II.38), que deux équations suffisent pour déterminer  $A(a_0, a_1, a_2)$  et  $B(a_0, a_1, a_2)$ . En revanche, connaissant ces deux fonctions, on ne peut pas déterminer les trois fonctions  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$ .

On peut donc supposer que  $a_2$  est une fonction quelconque bornée des trois invariants et déterminer  $a_0$  et  $a_1$  en fonction de  $a_2$ . D'après (II.38), on a:

$$\begin{cases} a_1 &= \frac{-(2I_1^\Delta I_2^\Delta - 9I_3^\Delta) a_2}{I_1^{\Delta^2} - 6I_2^\Delta} \\ &\pm \frac{\sqrt{(2I_1^\Delta I_2^\Delta - 9I_3^\Delta)^2 a_2^2 - (I_1^{\Delta^2} - 6I_2^\Delta) [a_2^2 (4I_2^{\Delta^2} - 12I_4^\Delta) - \alpha_0^\infty]}}{I_1^{\Delta^2} - 6I_2^\Delta} \\ a_0 &= \frac{a_1 I_1^\Delta + 2a_2 I_2^\Delta \pm \beta_0^\infty}{3} \end{cases}$$

où

$$I_4^\Delta = \frac{1}{4} \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Delta}}^4)$$

$$\alpha_0^\infty = \frac{(3\lambda_0 + 2\mu_0) \Psi_\infty - (3\lambda_\infty + 2\mu_\infty) \Psi_0}{(\mu_\infty \lambda_0 - \mu_0 \lambda_\infty)}$$

$$\beta_0^\infty = \sqrt{2 \frac{\mu_\infty \Psi_0 - \mu_0 \Psi_\infty}{(\mu_\infty \lambda_0 - \mu_0 \lambda_\infty)}}$$

La mesure linéarisante la plus simple, compatible avec ce qui précède et vérifiant les relations (II.16), (II.17) et (II.18) est celle où  $a_2 = 0$ . Une telle mesure est définie par:

$$\text{II.39} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\mathbb{E}}} = a_0 (I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) \underline{\underline{1}} + a_1 (I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) \underline{\underline{\Delta}} \\ \text{telle que } \Psi(t) = \frac{1}{2} [\lambda(t) [\operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbb{E}}}]^2 + 2 \mu(t) \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbb{E}}}^2)] \end{cases}$$

Le choix de cette mesure se justifie par le fait qu'on ne peut identifier par des essais de relaxation que deux fonctions puisque, dans le cas isotrope, on ne dispose que de deux fonctions mémoire  $\lambda$  et  $\mu$ .

Par conséquent, le système ( $\mathcal{S}_1$ ) se réduit à:

$$\text{II.40} \quad \begin{cases} 2 \Psi_0 = [9a_0^2 + 6a_0a_1I_1^\Delta + a_1^2I_1^{\Delta^2}] \lambda_0 + [3a_0^2 + 2a_0a_1I_1^\Delta + 2a_1^2] \mu_0 \\ 2 \Psi_\infty = [9a_0^2 + 6a_0a_1I_1^\Delta + a_1^2I_1^{\Delta^2}] \lambda_\infty + [3a_0^2 + 2a_0a_1I_1^\Delta + 2a_1^2] \mu_\infty \end{cases}$$

A partir de (II.35) et (II.37), on peut déterminer  $[\operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbb{E}}})]^2$  et  $\operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbb{E}}}^2)$  en fonction de  $\Psi_0, \Psi_\infty, \lambda_0, \lambda_\infty, \mu_0$  et  $\mu_\infty$ :

$$\text{II.41} \quad \begin{cases} [\operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbb{E}}})]^2 = 2 \frac{\mu_\infty \Psi_0 - \mu_0 \Psi_\infty}{(\mu_\infty \lambda_0 - \mu_0 \lambda_\infty)} \\ \operatorname{tr}(\underline{\underline{\mathbb{E}}}^2) = - \frac{\lambda_\infty \Psi_0 - \lambda_0 \Psi_\infty}{(\mu_\infty \lambda_0 - \mu_0 \lambda_\infty)} \end{cases}$$

qui correspondent aux relations II.3.

On peut maintenant identifier les fonctions  $a_0(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta)$  et  $a_1(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta)$ . De (II.39), (II.40) et (II.41), on déduit:

$$\text{II.42} \quad \begin{cases} a_1(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = \sqrt{\frac{(3\lambda_0 + 2\mu_0) \Psi_\infty - (3\lambda_\infty + 2\mu_\infty) \Psi_0}{(\mu_\infty \lambda_0 - \mu_0 \lambda_\infty) (6 I_2^\Delta - I_1^{\Delta^2})}} \\ a_0(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = \frac{-a_1 I_1^\Delta}{3} + \frac{\operatorname{sgn}(I_1^\Delta)}{3} \sqrt{2 \frac{\mu_\infty \Psi_0 - \mu_0 \Psi_\infty}{(\mu_\infty \lambda_0 - \mu_0 \lambda_\infty)}} \end{cases}$$



où  $\text{sgn}(I_1^\Delta)$  est le signe de  $I_1^\Delta$ , soit:

$$\text{sgn}(I_1^\Delta) = \begin{cases} +1 & \text{si } I_1^\Delta > 0 \\ 0 & \text{si } I_1^\Delta = 0 \\ -1 & \text{si } I_1^\Delta < 0 \end{cases}$$

**Remarque 2.1** La résolution du système en  $a_0(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta)$  et  $a_1(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta)$  nous a donné, en fait, deux solutions opposées pour  $a_1(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta)$  et, en conséquence, quatre solutions pour  $a_0(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta)$ . L'équivalence aux petites déformations selon laquelle  $\underline{\underline{\mathbb{E}}} \equiv \underline{\underline{\varepsilon}}$  nous a permis de conclure.

Nemat-Nasser et Mehrabadi [Nemat-Nasser & Mehrabadi, 1987] affirment que la mesure de déformation doit être nulle en l'absence de déformation, positive et croissante quand le matériau considéré est en extension et doit se réduire à la déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  quand le comportement est linéarisé. Donc, à ce stade de l'identification, il faut vérifier la validité de la mesure de déformation qui, dans ce cas, est sujette à la connaissance des potentiels  $\Psi_0$  et  $\Psi_\infty$ .

Afin de s'affranchir de cette difficulté, on pourrait choisir une mesure qui vérifie naturellement les conditions de validité imposées par Nemat-Nasser et Mehrabadi [Nemat-Nasser & Mehrabadi, 1987]. Cette étude est proposée dans le paragraphe suivant.

## 2.5 Mesures particulières: les mesures de Seth

Seth [Seth, 1964] propose une mesure écrite sous forme de puissance du tenseur de Cauchy-Green droit  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ :

$$\text{II.43} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\mathbb{E}}} = \frac{1}{m} (\underline{\underline{\mathbb{C}}}^{\frac{m}{2}} - \underline{\underline{\mathbf{1}}}) & \text{si } m \in \mathbb{R}^* \\ \underline{\underline{\mathbb{E}}} = \ln(\underline{\underline{\mathbb{C}}}) & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

Dans le cas où  $m = 2$ , on retrouve le tenseur de Green-Lagrange  $\underline{\underline{\Delta}}$ . Si, en outre, les déformations sont petites, alors on retrouve le tenseur de déformation linéarisée  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  puisque:

$$\|{}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}\| = o(\|\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}}\|)$$

Nemat-Nasser et Mehrabadi [Nemat-Nasser & Mehrabadi, 1987] montrent que ces mesures vérifient les conditions de validité. L'identification se limite donc à la détermination du scalaire  $m$ .

Ces mesures incluent donc les cas linéaire et petites perturbations et sont un cas particulier de la mesure générale proposée par la relation (II.15) puisque Morman [Morman, 1988] a montré qu'elles pouvaient s'écrire sous la forme:

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}}^{\frac{m}{2}} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha}^m \left[ \frac{\mathbb{C}^2 - (I_1^C - \lambda_{\alpha}^2) \underline{\underline{\mathbb{C}}} + I_3^C \lambda_{\alpha}^{-2} \underline{\underline{\mathbb{1}}}}{2 \lambda_{\alpha}^4 - I_1^C \lambda_{\alpha}^2 + I_3^C \lambda_{\alpha}^{-2}} \right]$$

où  $(\lambda_{\alpha})_{\alpha=1\dots 3}$  sont les valeurs propres principales du tenseur d'élongation droit  $\underline{\underline{\mathbb{U}}}$  et  $I_1^C$  et  $I_3^C$  sont les premier et troisième invariants de  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ , respectivement ( $I_1^C = \text{tr} \underline{\underline{\mathbb{C}}}$ ,  $I_3^C = \det \underline{\underline{\mathbb{C}}}$ ).

Ces mesures ont l'avantage de s'écrire sous la forme

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}} = b_0 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) \underline{\underline{\mathbb{1}}} + b_1 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) \underline{\underline{\mathbb{C}}} + b_2 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) \underline{\underline{\mathbb{C}}}^2$$

avec

$$\text{II.44} \quad \begin{cases} b_0 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) &= \frac{1}{m} \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \frac{\lambda_{\alpha}^m I_3^C \lambda_{\alpha}^{-2}}{2 \lambda_{\alpha}^4 - I_1^C \lambda_{\alpha}^2 + I_3^C \lambda_{\alpha}^{-2}} \right] - 1 \right\} \\ b_1 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) &= \frac{1}{m} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\lambda_{\alpha}^m (\lambda_{\alpha}^2 - I_1^C)}{2 \lambda_{\alpha}^4 - I_1^C \lambda_{\alpha}^2 + I_3^C \lambda_{\alpha}^{-2}} \\ b_2 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) &= \frac{1}{m} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\lambda_{\alpha}^m}{2 \lambda_{\alpha}^4 - I_1^C \lambda_{\alpha}^2 + I_3^C \lambda_{\alpha}^{-2}} \end{cases}$$

En remplaçant l'expression de  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$  en fonction de  $\underline{\underline{\Delta}}$ , on peut relier les fonctions  $b_i (I_j^C)_{(i=0\dots 2, j=1\dots 3)}$  aux fonctions  $a_i (I_j^{\Delta})_{(i=0\dots 2, j=1\dots 3)}$ :

$$\begin{cases} a_0 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) &= b_0 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) + b_1 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) + b_2 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) \\ a_1 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) &= 2 b_1 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) + 4 b_2 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) \\ a_2 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) &= 4 b_2 (I_1^C, I_2^C, I_3^C) \end{cases}$$

D'autre part, sachant que les invariants de  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$  sont reliés à ceux de  $\underline{\underline{\Delta}}$  par les relations suivantes:

$$\begin{cases} I_1^C &= \text{tr} \underline{\underline{\mathbb{C}}} &= 2 I_1^{\Delta} + 3 \\ I_3^C &= \det \underline{\underline{\mathbb{C}}} &= 8 I_3^{\Delta} - 8 I_1^{\Delta} I_2^{\Delta} + \frac{4}{3} I_1^{\Delta^3} + 2 I_1^{\Delta^2} - 4 I_2^{\Delta} + 2 I_1^{\Delta} + 1 \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} I_1^{\Delta} &= \text{tr} \underline{\underline{\Delta}} \\ I_2^{\Delta} &= \frac{1}{2} \text{tr} (\underline{\underline{\Delta}}^2) \\ I_3^{\Delta} &= \frac{1}{3} \text{tr} (\underline{\underline{\Delta}}^3) \end{cases}$$

on obtient les fonctions  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  en fonction des trois invariants de  $\underline{\underline{\Delta}}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = \frac{1}{m} \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^m \left[ \frac{I_0^\Delta \lambda_\alpha^{-2} + \lambda_\alpha^2 - 2I_1^\Delta - 2}{2 \lambda_\alpha^4 - (2I_1^\Delta + 3) \lambda_\alpha^2 + I_0^\Delta \lambda_\alpha^{-2}} \right] - 1 \right\} \\ a_1(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = \frac{2}{m} \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\alpha^m \frac{\lambda_\alpha^2 - 2 I_1^\Delta - 1}{2 \lambda_\alpha^4 - (2I_1^\Delta + 3) \lambda_\alpha^2 + I_0^\Delta \lambda_\alpha^{-2}} \\ a_2(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = \frac{4}{m} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\lambda_\alpha^m}{2 \lambda_\alpha^4 - (2I_1^\Delta + 3) \lambda_\alpha^2 + I_0^\Delta \lambda_\alpha^{-2}} \end{array} \right.$$

avec

$$I_0^\Delta = 8I_3^\Delta - 8I_1^\Delta I_2^\Delta + \frac{4}{3}I_1^{\Delta^3} + 2I_1^{\Delta^2} - 4I_2^\Delta + 2I_1^\Delta + 1$$

En résolvant le système (II.38) en ne gardant que l'élasticité initiale et l'équilibre, on trouve:

$$\text{II.45} \quad \left\{ \begin{array}{l} A(a_0, a_1, a_2) = 2 \frac{\mu_\infty \Psi_0 - \mu_0 \Psi_\infty}{\mu_\infty \lambda_0 - \mu_0 \lambda_\infty} \\ B(a_0, a_1, a_2) = 2 \frac{\lambda_0 \Psi_\infty - \lambda_\infty \Psi_0}{\mu_\infty \lambda_0 - \mu_0 \lambda_\infty} \end{array} \right.$$

Or, l'expression de  $A(a_0, a_1, a_2)$  étant connue, on se ramène à la résolution d'une équation non linéaire en  $m$ . En notant:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_\alpha = \frac{I_0^\Delta \lambda_\alpha^{-2} + \lambda_\alpha^2 - 2I_1^\Delta - 2}{2 \lambda_\alpha^4 - (2I_1^\Delta + 3) \lambda_\alpha^2 + I_0^\Delta \lambda_\alpha^{-2}} \\ Y_\alpha = 2 \frac{\lambda_\alpha^2 - 2 I_1^\Delta - 1}{2 \lambda_\alpha^4 - (2I_1^\Delta + 3) \lambda_\alpha^2 + I_0^\Delta \lambda_\alpha^{-2}} \\ Z_\alpha = \frac{4}{2 \lambda_\alpha^4 - (2I_1^\Delta + 3) \lambda_\alpha^2 + I_0^\Delta \lambda_\alpha^{-2}} \end{array} \right.$$

$m$  est solution de l'équation:

$$\begin{aligned}
 \text{II.46} \quad & \frac{1}{m^2} \left\{ 9 \left[ \sum_{\alpha=1}^3 (\lambda_{\alpha}^m X_{\alpha}) - 1 \right]^2 + 6 \left[ \sum_{\alpha=1}^3 (\lambda_{\alpha}^m X_{\alpha}) - 1 \right] \left[ \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha}^m Y_{\alpha} \right] I_1^{\Delta} \right. \\
 & + \left[ \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha}^m Y_{\alpha} \right]^2 I_1^{\Delta^2} + 12 \left[ \sum_{\alpha=1}^3 (\lambda_{\alpha}^m X_{\alpha}) - 1 \right] \left[ \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha}^m Z_{\alpha} \right] I_2^{\Delta} \\
 & + 4 \left[ \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha}^m Y_{\alpha} \right] \left[ \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha}^m Z_{\alpha} \right] I_1^{\Delta} I_2^{\Delta} + 4 \left[ \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha}^m Z_{\alpha} \right]^2 I_2^{\Delta^2} \Big\} \\
 & - 2 \frac{\mu_{\infty} \Psi_0 - \mu_0 \Psi_{\infty}}{\mu_{\infty} \lambda_0 - \mu_0 \lambda_{\infty}} = 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque valeur de  $(\lambda_{\alpha})_{\alpha=1\dots 3}$ , on a une valeur de  $m$ . On choisit alors une valeur de  $m$  au voisinage des déformations souhaitées. Cette méthode reste néanmoins très complexe car l'équation précédente est fortement non linéaire du fait de la dépendance en  $\lambda_{\alpha}$  du second membre, des différents invariants et de  $X_{\alpha}$ ,  $Y_{\alpha}$  et  $Z_{\alpha}$ .

On peut également déterminer  $m$  par minimisation du terme de gauche de l'équation précédente pour un  $\lambda_{\alpha}$  choisi dans un intervalle entourant la déformation désirée.

## 2.6 Liaison avec l'hyperélasticité

### 2.6.1 Exemples de potentiels hyperélastiques

Souvent, les comportements des polymères sont approchés par des comportements hyperélastiques. Ce type de comportements est décrit par des potentiels d'énergie libre qui, dans le cas isotrope, dépendent des invariants de  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ . Par exemple, les potentiels de Mooney-Rivlin, de Blatz-Ko ou de Hart-Smith sont des potentiels souvent utilisés:

- Le potentiel de Mooney-Rivlin

Mooney et Rivlin [Rivlin, 1951], proposent comme potentiel hyperélastique, un potentiel dépendant des deux premiers invariants de  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$  (dans le cas incompressible). Ce potentiel, écrit à l'ordre 2, a la forme:

$$\Psi_{MR} = C_1 (I_1^C - 3) + C_2 (I_2^C - 3)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes du matériau.

A l'ordre  $n$ , il s'écrit:

$$\Psi_{MR} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n C_{ij} (I_1^C - 3)^i (I_2^C - 3)^j$$

Dans le cas compressible, il dépend de trois invariants de  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$  et peut être généralisé sous différentes formes. Les plus couramment utilisées sont les suivantes:

$$\Psi_{MR} = C_1 \left( I_1^C - 3 I_3^{C\frac{1}{3}} \right) + C_2 \left( I_2^C - 3 I_3^{C\frac{2}{3}} \right) + \frac{C_3}{3} \ln^2 \left( I_3^{C\frac{1}{3}} \right)$$

ou

$$\Psi_{MR} = A (I_1^C - 3) + B (I_2^C - 3) + C (I_3^{C^2} - 1) + D (I_3^C - 1)^2$$

où les différents coefficients sont des constantes du matériau.

– Le potentiel de Blatz-Ko

Dans le cas compressible, le potentiel de Blatz-Ko [Brockman, 1986] dépend du premier et du troisième invariants de  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ . Dans le cas incompressible, c'est un cas particulier du potentiel de Mooney-Rivlin (ordre 1).

$$\Psi_{BK} = \frac{1}{2} \mu' \left[ (I_1^C - 3) + \frac{2}{a} \left( I_3^{C^{-\frac{a}{2}}} - 1 \right) \right]$$

où  $\mu'$  et  $a$  sont des constantes du matériau. De plus,  $a$  est un paramètre qui dépend du coefficient de Poisson  $\nu$  selon la relation

$$a = \frac{2 \nu}{1 - 2 \nu}$$

– Le potentiel de Hart-Smith

Le potentiel de Hart-Smith [Hart-Smith, 1966] est défini selon une loi hyperbolique exponentielle qui, dans le cas incompressible, est de la forme:

$$W_{HS} = C \int e^{k_1 (I_1^C - 3)^2} dI_1^C + k_2 \ln \frac{I_2^C}{3}$$

où  $C$ ,  $k_1$  et  $k_2$  sont des constantes du matériau.

Dans tous ces potentiels, les invariants  $I_1^C$ ,  $I_2^C$  et  $I_3^C$  sont définis par (II.48).

### 2.6.2 Linéarisation hyperélastique

L'avantage du modèle pseudo-linéaire est de pouvoir déterminer simplement une mesure linéarisante d'un comportement hyperélastique par équivalence aux petites déformations. A titre d'exemple, déterminons les coefficients  $a_0$  et  $a_1$  d'une mesure linéarisante pour un potentiel de Mooney-Rivlin compressible que l'on choisit sous la forme:

$$\text{II.47} \quad W_{MR} = C_1 \left( I_1^C - 3 I_3^{C\frac{1}{3}} \right) + C_2 \left( I_2^C - 3 I_3^{C\frac{2}{3}} \right) + \frac{C_3}{3} \ln^2 \left( I_3^{C\frac{1}{3}} \right)$$

avec

$$\text{II.48} \quad \begin{cases} I_1^C = \text{tr}(\underline{\underline{\mathbb{C}}}) \\ I_2^C = \frac{1}{2} \left( [\text{tr}(\underline{\underline{\mathbb{C}}})]^2 - \text{tr}(\underline{\underline{\mathbb{C}}}^2) \right) \\ I_3^C = \det(\underline{\underline{\mathbb{C}}}) \end{cases}$$

L'objectif est de déterminer les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  du modèle pseudo-linéaire en fonction des coefficients  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ . Pour cela, on se place dans des cas particuliers en petites déformations.

– Premier cas particulier: considérons une déformation de la forme:

$$\text{II.49} \quad \underline{\underline{\Delta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est une déformation «suffisamment petite».

Le potentiel de Mooney-Rivlin et le potentiel pseudo-linéaire d'énergie libre sont alors équivalents à:

$$\text{II.50} \quad \begin{cases} W_{MR_{eq}} = \frac{9}{2} C_3 \cdot \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \\ \Psi_{eq} = \left( \frac{9}{2} \lambda + 3 \mu \right) \cdot \varepsilon^2 \end{cases}$$

– Second cas particulier: on considère une autre petite déformation telle que:

$$\text{II.51} \quad \underline{\underline{\Delta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \varepsilon$$

Les potentiels d'énergie libre prennent alors les formes suivantes:

$$\text{II.52} \quad \begin{cases} \Psi_{MR_{eq}} = 12(C_1 + C_2) \cdot \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \\ \Psi_{eq} = 6\mu \cdot \varepsilon^2 \end{cases}$$

Les systèmes d'équations (II.50) et (II.52) permettent de déterminer les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$ .

$$\text{II.53} \quad \begin{cases} \mu = 2(C_1 + C_2) \\ \lambda = C_3 - \frac{4}{3}(C_1 + C_2) \end{cases}$$

Le potentiel hyperélastique étant défini par rapport à l'équilibre, les coefficients  $a_0$  et  $a_1$  du modèle pseudo-linéaire sont les suivants [Alaoui Soulimani, 1993]:

$$\text{II.54} \quad \begin{cases} a_1(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = \sqrt{\frac{W_{MR}(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta)}{\frac{1}{2} \left[ C_3 - \frac{4}{3}(C_1 + C_2) \right] \cdot I_1^{\Delta^2} + 4(C_1 + C_2) \cdot I_2^\Delta}} \\ a_0(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = 0 \end{cases}$$

Cette mesure linéarisante n'est évidemment pas la seule. Ce type de linéarisation peut être fait de manière analogue pour tout autre potentiel hyperélastique.

### 2.6.3 Linéarisation viscoélastique

Supposons que l'on désire linéariser un comportement viscoélastique défini aux temps courts par un potentiel de Blatz-Ko et aux temps longs par un potentiel hyperélastique de Mooney-Rivlin (II.47) par exemple. Dans ce cas, on dispose de deux potentiels  $W_{BK_i}$  (potentiel initial) et  $W_{MR_\infty}$  (potentiel à l'équilibre) définis par:

$$\text{II.55} \quad \begin{cases} W_{BK_i} = \frac{1}{2} \mu'_i \left[ (I_1^C - 3) + \frac{2}{a_i} (I_3^{C-\frac{a_i}{2}} - 1) \right] \\ W_{MR_\infty} = C_{1\infty} (I_1^C - 3 I_3^{C\frac{1}{3}}) + C_{2\infty} (I_2^C - 3 I_3^{C\frac{2}{3}}) + \frac{C_{3\infty}}{3} \ln^2 (I_3^{C\frac{1}{3}}) \end{cases}$$

où  $\mu'_i$ ,  $a_i$ ,  $C_{1\infty}$ ,  $C_{2\infty}$  et  $C_{3\infty}$  sont des constantes du matériau.

L'identification se fait de manière analogue au cas précédent, c'est à dire par équivalence aux petites déformations (moyennant des chargements de type (II.49)

et (II.51)). Dans ce cas, on identifie les quatre paramètres  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\lambda_\infty$  et  $\mu_\infty$  définis aux temps courts et aux temps longs par:

$$\text{II.56} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_i = \mu'_i (1 - 2a_i) \\ \lambda_i = \frac{7}{3} a_i \mu'_i \\ \mu_\infty = 2 (C_{1\infty} + C_{2\infty}) \\ \lambda_\infty = C_{3\infty} - \frac{4}{3} (C_{1\infty} + C_{2\infty}) \end{array} \right.$$

De plus, les coefficients  $a_0$  et  $a_1$  sont donnés par (II.42):

$$\text{II.57} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 (I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = \sqrt{\frac{\mu'_i (3a_i + 2) W_{MR_\infty} + 3 C_{3\infty} W_{BK_i}}{\lambda_\infty^0 (6 I_2^\Delta - I_1^{\Delta^2})}} \\ a_0 (I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = \frac{-a_1 I_1^\Delta}{3} \\ \quad + \frac{\text{sgn}(I_1^\Delta)}{3} \sqrt{2 \frac{(C_{1\infty} + C_{2\infty}) W_{BK_i} - \mu'_i (1 - 2a_i) W_{MR_\infty}}{\lambda_\infty^0}} \end{array} \right.$$

où

$$\lambda_\infty^0 = \mu'_i \left[ \frac{2}{3} (C_{1\infty} + C_{2\infty}) (3a_i + 2) + (2a_i - 1) C_{3\infty} \right]$$

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a montré comment, sous l'hypothèse d'isotropie du matériau, on pouvait trouver simplement une mesure de déformation linéarisante. Ainsi, la connaissance du comportement d'un matériau aux temps courts et aux temps longs nous permet de connaître le comportement de ce matériau à chaque instant. Par exemple, si l'on sait, moyennant quelques manipulations expérimentales, qu'un matériau se comporte aux temps très courts et aux temps très longs comme un matériau hyperélastique (de type Mooney-Rivlin, par exemple), alors on peut déterminer de façon unique les coefficients  $a_0$  et  $a_1$  qui nous permettent d'obtenir une mesure linéarisante (qui n'est pas unique) de ce comportement. Ce type de linéarisation a fait l'objet du paragraphe 2.6 et a montré que pour tout comportement identifié aux temps courts et aux temps longs par des potentiels hyperélastiques, on peut déterminer une mesure linéarisante. Dans ce chapitre, nous l'avons montré pour des cas particuliers de potentiels, mais cette technique peut être généralisée pour tout autre potentiel hyperélastique.



## Chapitre 3

## Validation

### 3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de savoir si le modèle pseudo-linéaire présente une certaine généralité et s'il peut représenter une gamme suffisamment large de comportements viscoélastiques. Pour cela, nous allons essayer d'approcher le comportement d'un matériau fictif identifié par un potentiel d'énergie libre écrit sous forme d'un développement de Fréchet d'ordre 4 [Fréchet, 1910] que l'on nommera, par abus de langage, potentiel de Fréchet. On se restreint au cas des matériaux compressibles et isotropes.

Nous allons donc développer toutes les étapes d'identification puis nous établirons des critères nous permettant de choisir la forme des fonctions de relaxation afin de nous permettre d'effectuer des simulations, du chargement le plus simple (traction) aux chargements très complexes (succession de chargements dans différentes directions), jugeant de la justesse du modèle.

### 3.2 Potentiel et contrainte de Fréchet

#### 3.2.1 Potentiel de Fréchet

Le matériau étant supposé isotrope, le potentiel d'énergie libre peut être considéré comme ne dépendant que des trois invariants de  $\underline{\underline{\Delta}}$ ,  $I_1^\Delta$ ,  $I_2^\Delta$ ,  $I_3^\Delta$  avec  $I_1^\Delta = \text{tr}(\underline{\underline{\Delta}})$ ,  $I_2^\Delta = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\Delta}}^2)$ ,  $I_3^\Delta = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\Delta}}^3)$ .

Pour un développement d'ordre 4 en série d'intégrales multiples, toutes les combinaisons possibles sont les suivantes [Spencer & Rivlin, 1959]:  $I_1^{\Delta^2}$ ,  $I_2^\Delta$ ,  $I_1^{\Delta^3}$ ,  $I_1^\Delta \cdot I_2^\Delta$ ,  $I_3^\Delta$ ,  $I_1^{\Delta^4}$ ,  $I_1^{\Delta^2} \cdot I_2^\Delta$ ,  $I_2^{\Delta^2}$ ,  $I_3^\Delta \cdot I_1^\Delta$  et  $I_4^\Delta$ .

Toutefois,  $I_4^\Delta$  (et donc  $\text{tr}(\underline{\underline{\Delta}}^4)$ ) peut être exprimé en fonction des autres invariants de  $\underline{\underline{\Delta}}$  (voir annexe A).

En notant  $(r_i)_{i=1\dots 5}$  et  $(r'_i)_{i=6\dots 9}$  les fonctions mémoire, le potentiel de Fréchet d'ordre 4  $\tilde{\Psi}^1$  est donné par:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi}(t) = & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{2} r_1(t - \tau_1, t - \tau_2) \operatorname{tr} \dot{\underline{\Delta}}(\tau_1) \cdot \operatorname{tr} \dot{\underline{\Delta}}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{2} r_2(t - \tau_1, t - \tau_2) \operatorname{tr} [\dot{\underline{\Delta}}(\tau_1) \cdot \dot{\underline{\Delta}}(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{3} r_3(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \operatorname{tr} \dot{\underline{\Delta}}(\tau_1) \cdot \operatorname{tr} \dot{\underline{\Delta}}(\tau_2) \cdot \operatorname{tr} \dot{\underline{\Delta}}(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t r_4(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \operatorname{tr} \dot{\underline{\Delta}}(\tau_1) \cdot \operatorname{tr} [\dot{\underline{\Delta}}(\tau_2) \cdot \dot{\underline{\Delta}}(\tau_3)] d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t r_5(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \operatorname{tr} [\dot{\underline{\Delta}}(\tau_1) \cdot \dot{\underline{\Delta}}(\tau_2) \cdot \dot{\underline{\Delta}}(\tau_3)] d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{4} r'_6(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3, t - \tau_4) \\
 & \quad \operatorname{tr} \dot{\underline{\Delta}}(\tau_1) \cdot \operatorname{tr} \dot{\underline{\Delta}}(\tau_2) \cdot \operatorname{tr} \dot{\underline{\Delta}}(\tau_3) \cdot \operatorname{tr} \dot{\underline{\Delta}}(\tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{2} r'_7(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3, t - \tau_4) \\
 & \quad \operatorname{tr} \dot{\underline{\Delta}}(\tau_1) \cdot \operatorname{tr} \dot{\underline{\Delta}}(\tau_2) \cdot \operatorname{tr} [\dot{\underline{\Delta}}(\tau_3) \cdot \dot{\underline{\Delta}}(\tau_4)] d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{4} r'_8(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3, t - \tau_4) \\
 & \quad \operatorname{tr} [\dot{\underline{\Delta}}(\tau_1) \cdot \dot{\underline{\Delta}}(\tau_2)] \cdot \operatorname{tr} [\dot{\underline{\Delta}}(\tau_3) \cdot \dot{\underline{\Delta}}(\tau_4)] d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{3} r'_9(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3, t - \tau_4) \\
 & \quad \operatorname{tr} [\dot{\underline{\Delta}}(\tau_1) \cdot \dot{\underline{\Delta}}(\tau_2) \cdot \operatorname{tr} \dot{\underline{\Delta}}(\tau_3)] \cdot \operatorname{tr} \dot{\underline{\Delta}}(\tau_4) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4
 \end{aligned}$$

TAB. 3.1 - Potentiel de Fréchet

$$\text{où } \begin{cases} r'_6(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots) = r_6(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots) + 1/6 r_{10}(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots) \\ r'_7(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots) = r_7(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots) - 1/2 r_{10}(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots) \\ r'_8(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots) = r_8(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots) + 1/2 r_{10}(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots) \\ r'_9(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots) = r_9(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots) + r_{10}(t - \tau_1, t - \tau_2, \dots) \end{cases}$$

et  $r_{10}$  est la fonction mémoire correspondant à  $\operatorname{tr} (\underline{\Delta}^4)$  dans l'expression du potentiel d'énergie libre. Pour assurer la positivité du potentiel de Fréchet, il faut que les fonctions mémoire d'ordre pair ( $r_1, r_2$  et  $r'_{6\dots 9}$ ) soient positives et que celles d'ordre impair ( $r_{3\dots 5}$ ) soient soit nulles soit très petites par rapport aux autres.

1. L'exposant  $\sim$  correspond au potentiel de Fréchet et à la contrainte qui en dérive

### 3.2.2 Contrainte de Fréchet et puissance dissipée

Afin de déterminer la contrainte associée au potentiel de Fréchet, vérifions qu'il s'agit d'un processus admissible, c'est à dire que la puissance dissipée  $\tilde{\mathcal{D}}$  est positive. En formulation Lagrangienne, on a [Mandel, 1977]:

$$\text{II.58} \quad \tilde{\mathcal{D}}(t) = \underline{\underline{\Pi}}(t) : \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(t) - \dot{\Psi}(t) \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathcal{D}}(t) \geq 0 \quad \forall \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(t)$$

Sachant que l'inégalité de Clausius-Duhem ( $\tilde{\mathcal{D}} \geq 0$ ) doit être vérifiée pour tout  $\underline{\underline{\dot{\Delta}}}$  à tout instant  $t$ , on obtient l'expression de la contrainte de Piola-Kirchhoff 2:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Pi}}(t) = & \left( \int_{t_0}^t \tilde{r}_1(t - \tau_1) \operatorname{tr} \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_1) d\tau_1 \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \int_{t_0}^t \tilde{r}_2(t - \tau_1) \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_1) d\tau_1 \\ & + \left( \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \tilde{r}_3(t - \tau_1, t - \tau_2) \operatorname{tr} \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_1) \cdot \operatorname{tr} \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \tilde{r}_4(t - \tau_1, t - \tau_2) \operatorname{tr} \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \left( \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \tilde{r}_4(t - \tau_1, t - \tau_2) \operatorname{tr} \left[ \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_2) \right] d\tau_1 d\tau_2 \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \tilde{r}_5(t - \tau_1, t - \tau_2) \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \left( \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \tilde{r}_6(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \operatorname{tr} \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_1) \cdot \operatorname{tr} \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_2) \cdot \operatorname{tr} \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ & + \left( \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \tilde{r}_7(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \operatorname{tr} \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_1) \cdot \operatorname{tr} \left[ \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_2) \cdot \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_3) \right] d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \tilde{r}_7(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \operatorname{tr} \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_1) \cdot \operatorname{tr} \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_2) \cdot \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \tilde{r}_8(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_1) \cdot \operatorname{tr} \left[ \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_2) \cdot \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_3) \right] d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \tilde{r}_9(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_2) \cdot \operatorname{tr} \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ & + \left( \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{3} \tilde{r}_9(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \operatorname{tr} \left[ \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_2) \cdot \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_3) \right] d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \tilde{r}_{10}(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_2) \cdot \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned}$$

TAB. 3.2 - Contrainte de Fréchet

avec la notation

$$\text{II.59} \quad r_i(t - \tau_1, \dots, t - \tau_{n-1}, 0) = \tilde{r}_i(t - \tau_1, \dots, t - \tau_{n-1})$$



En résumé, pour obtenir un processus physique admissible, il faut que les fonctions mémoire  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_{6...10}$  soient positives et décroissantes et que  $r_{3...5}$  soient nulles ou à valeurs très petites devant les autres fonctions mémoire.

### 3.3 Linéarisation et identification

#### 3.3.1 Fonctions de relaxation

Dans ce paragraphe, on se propose d'identifier les paramètres du potentiel pseudo-linéaire. Cela signifie que l'on doit déterminer les fonctions  $\lambda(t)$  et  $\mu(t)$  et ce, par équivalence aux petites déformations. à l'image de ce qui a été fait dans le cas du potentiel hyperélastique de Mooney-Rivlin (voir chapitre 2.6). Notons:

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{\nabla}} u$$

et

$$\tilde{\epsilon} = \sup_{t \geq \tau} |\underline{\underline{H}}(\tau)|$$

Si  $\tilde{\epsilon} \ll 1$  alors la déformation est dite infinitésimale. Le tenseur de déformation infinitésimale  $\underline{\underline{\epsilon}}$  est alors:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{H}} + {}^t\underline{\underline{H}})$$

Dans ce qui suit, on considère les fonctions tensorielles  $\underline{\underline{H}}$  du temps  $\tau$  ayant la propriété d'avoir, quel que soit le temps  $\tau$ , une amplitude inférieure à  $K\tilde{\epsilon}$ ,  $K$  étant un nombre indépendant du temps, de la fonction  $\underline{\underline{H}}(\tau)$  et de  $\tilde{\epsilon}$ . Une telle fonction sera notée par le symbole  $O(\tilde{\epsilon})$ , soit:

$$|O(\tilde{\epsilon})| < K\tilde{\epsilon}$$

On a alors les relations suivantes:

$$\begin{cases} \underline{\underline{F}}(t) &= \underline{\underline{1}} + O(\tilde{\epsilon}) \\ \underline{\underline{C}}(t) &= \underline{\underline{1}} + 2 \underline{\underline{\epsilon}}(t) + O(\tilde{\epsilon}^2) = \underline{\underline{1}} + O(\tilde{\epsilon}) \\ \underline{\underline{\Delta}}(t) &= O(\tilde{\epsilon}) \end{cases}$$

Les expressions du potentiel de Fréchet et de la contraintes qui en dérive deviennent:

$$\text{II.59a} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Psi}_{eq}(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{2} r_1(t - \tau_1, t - \tau_2) \operatorname{tr} \underline{\dot{\underline{\underline{\Delta}}}}(\tau_1) \cdot \operatorname{tr} \underline{\dot{\underline{\underline{\Delta}}}}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ \quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{2} r_2(t - \tau_1, t - \tau_2) \operatorname{tr} [\underline{\dot{\underline{\underline{\Delta}}}}(\tau_1) \cdot \underline{\dot{\underline{\underline{\Delta}}}}(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 + o(\tilde{\epsilon}^2) \\ \Pi_{eq}^{fre}(t) = \int_{t_0}^t \left( r_1(t - \tau_1, 0) \operatorname{tr} \underline{\dot{\underline{\underline{\Delta}}}}(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\underline{1}}} + r_2(t - \tau_1, 0) \cdot \underline{\dot{\underline{\underline{\Delta}}}}(\tau_1) \right) d\tau_1 + o(\tilde{\epsilon}) \end{array} \right.$$

L'hypothèse d'uniformité postulée précédemment implique que les équations (II.59a) restent valables si le tenseur  $\underline{\underline{\underline{\Delta}}}(t)$  est remplacé par  $\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}(t) = O(\tilde{\epsilon})$  [Coleman & Noll, 1961b]:

$$\text{II.59b} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Psi}_{eq}(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{2} r_1(t - \tau_1, t - \tau_2) \operatorname{tr} \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\tau_1) \cdot \operatorname{tr} \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ \quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{2} r_2(t - \tau_1, t - \tau_2) \operatorname{tr} [\underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\tau_1) \cdot \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 + o(\tilde{\epsilon}^2) \\ \Pi_{eq}^{fre}(t) = \int_{t_0}^t \left( r_1(t - \tau_1, 0) \operatorname{tr} \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\underline{1}}} + r_2(t - \tau_1, 0) \cdot \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\tau_1) \right) d\tau_1 + o(\tilde{\epsilon}) \end{array} \right.$$

Quand  $\tilde{\epsilon}$  est suffisamment petit, le reste  $o(\tilde{\epsilon})$  (resp.  $o(\tilde{\epsilon}^2)$ ) peut être négligé en comparaison avec les autres termes qui sont d'ordre  $O(\tilde{\epsilon})$  (resp.  $O(\tilde{\epsilon}^2)$ ) dans l'expression de la contrainte de Fréchet (resp. potentiel de Fréchet). Alors, le potentiel de Fréchet  $\tilde{\Psi}(t)$  est équivalent, à l'ordre 2, à:

$$\begin{aligned} \text{II.60} \quad \tilde{\Psi}(t) \equiv \tilde{\Psi}_{eq}(t) &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{2} r_1(t - \tau_1, t - \tau_2) \operatorname{tr} \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\tau_1) \cdot \operatorname{tr} \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{2} r_2(t - \tau_1, t - \tau_2) \operatorname{tr} [\underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\tau_1) \cdot \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

Pour des essais de relaxation de la forme  $\underline{\underline{\underline{\Delta}}}(t) = \underline{\underline{\underline{\Delta}}} H(t)$ , la relation (II.60) devient:

$$\text{II.61} \quad \tilde{\Psi}(t) \equiv \tilde{\Psi}_{eq}(t) = \frac{1}{2} r_1(t, t) [\operatorname{tr}(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}})]^2 + \frac{1}{2} r_2(t, t) \operatorname{tr}(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}})$$

En appliquant les mêmes opérations au potentiel pseudo-linéaire, on trouve:

$$\begin{aligned} \text{II.62} \quad \Psi(t) \equiv \Psi_{eq}(t) &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \lambda(2t - \tau_1 - \tau_2) \operatorname{tr} \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\tau_1) \cdot \operatorname{tr} \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \mu(2t - \tau_1 - \tau_2) \operatorname{tr} [\underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\tau_1) \cdot \underline{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}}(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

et en relaxation:

$$\text{II.63} \quad \Psi(t) \equiv \Psi_{eq}(t) = \frac{1}{2} \lambda(2t) [\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})]^2 + \mu(2t) \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^2)$$

En comparant terme-à-terme  $\tilde{\Psi}_{eq}(t)$  (relation (II.61)) et  $\Psi_{eq}(t)$  (relation (II.62)), on identifie les fonctions  $\lambda(t)$  et  $\mu(t)$ :

$$\text{II.64} \quad \begin{cases} \lambda(t) = r_1(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}) \\ \mu(t) = \frac{1}{2} r_2(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}) \end{cases}$$

En opérant de la même façon pour les contraintes pseudo-linéaire et de Fréchet, on obtient, par équivalence aux petites déformations<sup>2</sup>:

$$\text{II.65} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\Pi}}_{eq}^{fr}(t) = \int_{t_0}^t [r_1(t - \tau_1, 0) \text{tr}(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}}) + r_2(t - \tau_1, 0) \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau_1)] d\tau_1 \\ \underline{\underline{\Pi}}_{eq}^{p-l}(t) = \int_{t_0}^t [\lambda(t - \tau_1) \text{tr}(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}}) + 2\mu(t - \tau_1) \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau_1)] d\tau_1 \end{cases}$$

En relaxation, les relations (II.65) deviennent:

$$\text{II.66} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\Pi}}_{eq}^{fr}(t) = r_1(t, 0) \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} + r_2(t, 0) \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \underline{\underline{\Pi}}_{eq}^{p-l}(t) = \lambda(t) \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu(t) \underline{\underline{\varepsilon}} \end{cases}$$

En comparant terme-à-terme  $\underline{\underline{\Pi}}_{eq}^{fr}$  et  $\underline{\underline{\Pi}}_{eq}^{p-l}$ , on obtient:

$$\text{II.67} \quad \begin{cases} \lambda(t) = r_1(t, 0) \\ \mu(t) = \frac{1}{2} r_2(t, 0) \end{cases}$$

Les relations (II.64) et (II.67) conduisent à l'hypothèse classique qui résulte de l'étude des milieux viscoélastiques linéaires décrits par une approche par variables internes (voir les travaux de Staverman et Schwartzl [Staverman & Schwartzl, 1952<sub>a</sub>], [Staverman & Schwartzl, 1952<sub>b</sub>], de Mandel [Mandel, 1966], de Brun [Brun, 1967], [Brun, 1969] et de Biot [Biot, 1955]):

$$\text{II.68} \quad r(\alpha, \beta) = r(\alpha + \beta, 0) = \tilde{r}(\alpha + \beta)$$

---

2. Les exposants *fr* et *p-l* sont relatifs aux contraintes de Fréchet et pseudo-linéaire respectivement

où  $\tilde{r}$  est défini par la relation (II.59).

Finalement:

$$\text{II.69} \quad \begin{cases} \lambda(t) = \tilde{r}_1(t) \\ \mu(t) = \frac{1}{2} \tilde{r}_2(t) \end{cases}$$

**Remarque 3.1** Si on écrit l'énergie libre de Helmholtz comme suit

$$\rho_o \Psi(t) = \frac{1}{2} \int_{0-}^t \int_{0-}^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t - t_1 - t_2) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_2) dt_1 dt_2$$

c'est une forme particulière de:

$$\rho_o \Psi(t) = \int_{0-}^t \int_{0-}^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \underline{\underline{K}}(t - t_1, t - t_2) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_2) dt_1 dt_2$$

La comparaison entre ces deux expressions conduit à:

$$\underline{\underline{K}}(0, t) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t)$$

La connaissance de  $\underline{\underline{\mathbb{R}}}(t)$  n'est pas suffisante pour déterminer la forme générale de  $\underline{\underline{K}}(x, y)$  et donc de  $\rho_o \Psi(t)$  (voir [Breuer & Onat, 1964]). Dans leurs travaux, [Breuer & Onat, 1964] montrent que le tenseur  $\underline{\underline{K}}(x, y)$  est dégénéré et prouvent que la forme la plus générale du noyau de ce tenseur est:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_{ij} e^{-a_i x - a_j y}$$

où  $\beta_{ij}$  sont des constantes symétriques dues à la symétrie de  $\underline{\underline{K}}(x, y)$ .

Ce résultat corrobore la validité de la relation (II.68).

### 3.3.2 Potentiel et contrainte pseudo-linéaires

#### ◇ Potentiel pseudo-linéaire

En conséquence des résultats précédents, le potentiel pseudo-linéaire qui, initialement s'écrit

$$\Psi(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t - t_1 - t_2) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_2) dt_1 dt_2$$

prend la forme:



$$\begin{aligned}
\Psi(t) = & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \tilde{r}_1(2t - \tau_1 - \tau_2) \\
& \left\{ \text{tr} \left[ \left[ \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \frac{da_0}{d\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1) + a_1(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\Delta}}(\tau_1) \otimes \frac{da_1}{d\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1) \right] : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1) \right] \right. \\
& \left. \text{tr} \left[ \left[ \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \frac{da_0}{d\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_2) + a_1(\tau_2) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\Delta}}(\tau_2) \otimes \frac{da_1}{d\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_2) \right] : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_2) \right] \right\} d\tau_1 d\tau_2 \\
& + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \tilde{r}_2(2t - \tau_1 - \tau_2) \\
& \left\{ \text{tr} \left[ \left[ \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \frac{da_0}{d\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1) + a_1(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\Delta}}(\tau_1) \otimes \frac{da_1}{d\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1) \right] : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1) \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot \left[ \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \frac{da_0}{d\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_2) + a_1(\tau_2) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\Delta}}(\tau_2) \otimes \frac{da_1}{d\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_2) \right] : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_2) \right] \right\} d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned}$$

Les expressions des dérivées par rapport à  $\underline{\underline{\Delta}}$  des fonctions  $a_0(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta)$  et  $a_1(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta)$  sont développées dans [Alaoui Soulimani, 1993].

Pour des essais en relaxation, l'expression précédente du potentiel pseudo-linéaire devient:

$$\text{II.70} \quad \Psi(t) = r_1(t, t) \frac{r_{2\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{2_0} \tilde{\Psi}_\infty}{r_{2\infty} r_{1_0} - r_{2_0} r_{1\infty}} + r_2(t, t) \frac{r_{1\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{1_0} \tilde{\Psi}_\infty}{r_{1\infty} r_{2_0} - r_{1_0} r_{2\infty}}$$

où

$$\text{II.71} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{1\infty} = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow \infty \\ t_2 \rightarrow \infty}} r_1(t_1, t_2) \quad , \quad r_{1_0} = r_1(0, 0) \\ \\ r_{2\infty} = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow \infty \\ t_2 \rightarrow \infty}} r_2(t_1, t_2) \quad , \quad r_{2_0} = r_2(0, 0) \\ \\ \tilde{\Psi}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\Psi}(t) \quad , \quad \tilde{\Psi}_0 = \tilde{\Psi}(0) \end{array} \right.$$

◇ **Contrainte pseudo-linéaire**

A partir de la relation générale reliant la contrainte de Piola-Kirchhoff 2 à la déformation de Green-Lagrange

$$\underline{\underline{\Pi}}(t) = \left[ \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t - t_1) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1) dt_1 \right] : \frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}}(t)$$

on peut, compte tenu des résultats des paragraphes précédents, récrire cette relation après identification:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Pi}}(t) = & \int_{t_0}^t \tilde{r}_2(t - \tau_1) \left[ \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \frac{da_0}{d\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1) + a_1(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\Delta}}(\tau_1) \otimes \frac{da_1}{d\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1) \right] : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1) d\tau_1 \\ & + \int_{t_0}^t \tilde{r}_1(t - \tau_1) tr \left\{ \left[ \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \frac{da_0}{d\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1) + a_1(\tau_1) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\Delta}}(\tau_1) \otimes \frac{da_1}{d\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1) \right] : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}(\tau_1) \right\} \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} d\tau_1 \end{aligned}$$

**Remarque 3.2** *Le modèle proposé est construit de telle sorte que le potentiel pseudo-linéaire et le potentiel sur lequel on identifie le comportement (dans cet exemple, le potentiel de Fréchet) soient identiques aux temps courts et aux temps longs. Cela est corroboré par l'équation (II.70). En effet,*

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \Psi(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} r_1(t, t) \frac{r_{2\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{2_0} \tilde{\Psi}_\infty}{r_{2\infty} r_{1_0} - r_{2_0} r_{1\infty}} \\ &+ \lim_{t \rightarrow 0} r_2(t, t) \frac{r_{1\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{1_0} \tilde{\Psi}_\infty}{r_{1\infty} r_{2_0} - r_{1_0} r_{2\infty}} = \tilde{\Psi}_0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \Psi(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} r_1(t, t) \frac{r_{2\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{2_0} \tilde{\Psi}_\infty}{r_{2\infty} r_{1_0} - r_{2_0} r_{1\infty}} \\ &+ \lim_{t \rightarrow +\infty} r_2(t, t) \frac{r_{1\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{1_0} \tilde{\Psi}_\infty}{r_{1\infty} r_{2_0} - r_{1_0} r_{2\infty}} = \tilde{\Psi}_\infty \end{aligned} \right.$$

### 3.3.3 Mesure linéarisante

La mesure linéarisante a la même forme que celle définie par (II.15), avec, dans ce cas, comme coefficients  $a_0$  et  $a_1$ :

$$\text{II.72} \quad \begin{cases} a_1 (I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = \sqrt{2 \frac{(3r_{1_0} + r_{2_0}) \tilde{\Psi}_\infty - (3r_{1_\infty} + r_{2_\infty}) \tilde{\Psi}_0}{(r_{2_\infty} r_{1_0} - r_{2_0} r_{1_\infty}) (6 I_2^\Delta - I_1^{\Delta^2})}} \\ a_0 (I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta) = \frac{-a_1 I_1^\Delta}{3} + \frac{\text{sgn}(I_1^\Delta)}{3} \sqrt{2 \frac{r_{2_\infty} \tilde{\Psi}_0 - r_{2_0} \tilde{\Psi}_\infty}{(r_{2_\infty} r_{1_0} - r_{2_0} r_{1_\infty})}} \end{cases}$$

où  $r_{1_0}, r_{1_\infty}, r_{2_0}, r_{2_\infty}, \tilde{\Psi}_0$  et  $\tilde{\Psi}_\infty$  sont définis par (II.71).

## 3.4 Calage du modèle

### 3.4.1 Introduction

Dans ce qui a précédé, nous avons identifié entièrement le comportement. En effet, nous avons déterminé une mesure linéarisante (II.72) et les fonctions de relaxation  $\lambda(t)$  et  $\mu(t)$  (II.69). Toutefois, pour que ce comportement ainsi identifié soit thermodynamiquement admissible, il faut imposer les contraintes suivantes sur les potentiels et les fonctions mémoire aux temps courts et à l'équilibre:

$$\begin{cases} r_{1_0} \geq r_{1_\infty} \\ r_{2_0} \geq r_{2_\infty} \\ \tilde{\Psi}_0 \text{ et } \tilde{\Psi}_\infty \text{ sont des fonctions convexes} \\ \tilde{\Psi}_0 \geq \tilde{\Psi}_\infty \geq 0 \end{cases}$$

Etant donnée une forme des fonctions mémoire  $r_i(t)_{1 \dots 10}$ , le but de ce chapitre est de vérifier si elles répondent aux conditions précédentes. On se place dans le cas d'essais de relaxation.  $\tilde{\Psi}(t)$  est le potentiel de Fréchet et  $\Psi(t)$  le potentiel pseudo-linéaire. Pour les essais de relaxation considérés, ces potentiels sont des fonctions des invariants de  $\underline{\underline{\Delta}}$  et non des fonctionnelles de l'histoire de  $\underline{\underline{\Delta}}$ . Pour chaque cas de chargement considéré et pour une forme donnée des fonctions mémoire, on calcule, sur toute la base de temps, l'erreur entre ces deux potentiels. Cette erreur est choisie comme étant la surface qui sépare les deux courbes correspondant aux potentiels. Par conséquent, on peut écrire cette fonction d'erreur sous la forme:

$$\text{II.73} \quad Err = \int_0^\infty |\tilde{\Psi}(\tau) - \Psi(\tau)| dLn(\tau)$$

**Remarque 3.3** *L'identification du comportement se fait sur des essais de relaxation. En général, pour faire apparaître les différents temps caractéristiques, on trace la courbe de relaxation en échelle logarithmique du temps. Cela explique la forme choisie pour la fonction d'erreur.*

Néanmoins, sachant que les deux potentiels  $\Psi(t)$  et  $\tilde{\Psi}(t)$  sont identiques aux temps courts et aux temps longs (remarque 3.2), on peut supposer qu'il existe deux instants  $t_0$  et  $t_1$  ( $t_0 < t_1$ ) tels que  $Err$  soit très faible en dehors de l'intervalle  $[t_0, t_1]$ .

Par conséquent, (II.73) peut s'écrire:

$$\text{II.74} \quad Err = \int_{t_0}^{t_1} \left| \tilde{\Psi}(\tau) - \Psi(\tau) \right| dLn(\tau)$$

Dans ce qui suit, on s'intéresse au choix des fonctions de relaxation qui minimisent  $Err$ .

### 3.4.2 Forme des fonctions de relaxation

En général, on choisit des fonctions de relaxation sous forme puissance ou exponentielle. Pour ce qui nous concerne, nous avons opté pour des fonctions de relaxation sous forme exponentielle décroissante, essentiellement pour leur facilité d'utilisation (dérivées, intégrations...). Toutefois, on peut se demander si toutes les fonctions de relaxation ont une contribution sur tout le spectre de temps considéré et combien de temps caractéristiques suffisent pour décrire le comportement.

### 3.4.3 Choix du nombre de temps caractéristiques par décade

Certains auteurs recommandent l'utilisation de trois temps caractéristiques par décade. Pour arrêter notre choix, nous avons fait des simulations en traction/relaxation en prenant un, deux et trois temps caractéristiques par décade avec, pour chacun de ces cas, les fonctions de relaxation, sous forme exponentielle, suivantes:

- Un temps caractéristique par décade

$$\text{II.75} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} + b_{ij} e^{-c_{ij} \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} \text{ pour } i = 1 \dots 2 \\ r_i(t_1, t_2, t_3) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} + b_{ij} e^{-c_{ij} \left(\frac{t_1+t_2+t_3}{3}\right)} \text{ pour } i = 3 \dots 5 \\ r_i(t_1, t_2, t_3, t_4) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} + b_{ij} e^{-c_{ij} \left(\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{4}\right)} \text{ pour } i = 6 \dots 10 \end{array} \right.$$

– Deux temps caractéristiques par décade

$$\text{II.76} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^3 \left[ a_{ij} + b_{ij} e^{-c_{ij} \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} + b'_{ij} e^{-c'_{ij} \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} \right] \text{ pour } i = 1 \dots 2 \\ r_i(t_1, t_2, t_3) = \sum_{j=1}^3 \left[ a_{ij} + b_{ij} e^{-c_{ij} \left(\frac{t_1+t_2+t_3}{3}\right)} + b'_{ij} e^{-c'_{ij} \left(\frac{t_1+t_2+t_3}{3}\right)} \right] \text{ pour } i = 3 \dots 5 \\ r_i(t_1, t_2, t_3, t_4) = \sum_{j=1}^3 \left[ a_{ij} + b_{ij} e^{-c_{ij} \left(\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{4}\right)} + b'_{ij} e^{-c'_{ij} \left(\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{4}\right)} \right] \text{ pour } i = 6 \dots 10 \end{array} \right.$$

– Trois temps caractéristiques par décade

$$\text{II.77} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^3 \left[ a_{ij} + b_{ij} e^{-c_{ij} \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} + b'_{ij} e^{-c'_{ij} \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} + b''_{ij} e^{-c''_{ij} \left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} \right] \text{ pour } i = 1 \dots 2 \\ r_i(t_1, t_2, t_3) = \sum_{j=1}^3 \left[ a_{ij} + b_{ij} e^{-c_{ij} \left(\frac{t_1+t_2+t_3}{3}\right)} + b'_{ij} e^{-c'_{ij} \left(\frac{t_1+t_2+t_3}{3}\right)} + b''_{ij} e^{-c''_{ij} \left(\frac{t_1+t_2+t_3}{3}\right)} \right] \text{ pour } i = 3 \dots 5 \\ r_i(t_1, t_2, t_3, t_4) = \sum_{j=1}^3 \left[ a_{ij} + b_{ij} e^{-c_{ij} \left(\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{4}\right)} + b'_{ij} e^{-c'_{ij} \left(\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{4}\right)} + b''_{ij} e^{-c''_{ij} \left(\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{4}\right)} \right] \text{ pour } i = 6 \dots 10 \end{array} \right.$$

Pour opter pour l'une des trois formes ci-dessus, nous avons effectué des simulations en traction/relaxation dans le cadre d'un exemple. Nous avons choisi

une élongation  $\lambda_i = 2$  et les coefficients  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $a'_{ij}$ ,  $b'_{ij}$ ,  $c'_{ij}$ ,  $a''_{ij}$ ,  $b''_{ij}$  et  $c''_{ij}$  sont donnés dans l'annexe B. La figure 3.1 montre de telles simulations où nous avons tracé l'erreur sur le potentiel (II.74) en fonction du temps.

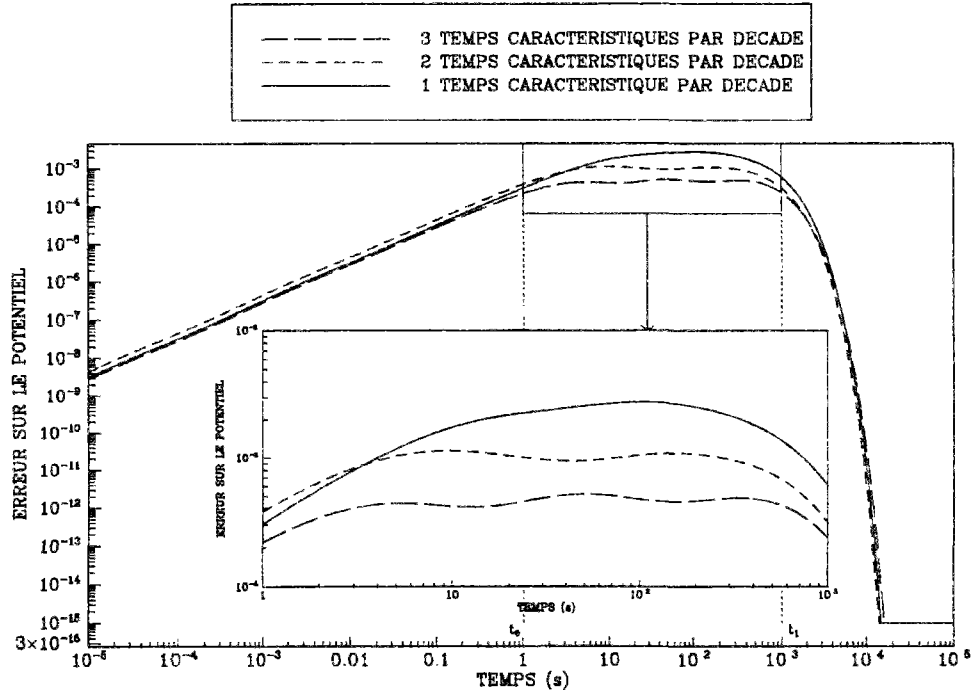


FIG. 3.1 - Erreur sur le potentiel: choix du nombre de temps caractéristiques par décade

Ces courbes ont été obtenues en choisissant les temps caractéristiques  $(\tau_{ij}^c)_{(i \leq 3, j=1 \dots 3)}$ , composantes de la matrice  $\mathbb{T}$  (dans l'intervalle  $[t_0, t_1]$  avec, dans cet exemple,  $t_0 = 1$  seconde et  $t_1 = 1000$  secondes) suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{3 temps caractéristiques/décade: } \mathbb{T}_{ij} = (\tau_{ij}^c) = \begin{pmatrix} 10^{0.25} & 10^{0.5} & 10^{0.75} \\ 10^{1.25} & 10^{1.5} & 10^{1.75} \\ 10^{2.25} & 10^{2.5} & 10^{2.75} \end{pmatrix} \text{ s.} \\ \\ \text{2 temps caractéristiques/décade: } \mathbb{T}_{ij} = (\tau_{ij}^c) = \begin{pmatrix} 10^{0.33} & 10^{0.66} \\ 10^{1.33} & 10^{1.66} \\ 10^{2.33} & 10^{2.66} \end{pmatrix} \text{ s.} \\ \\ \text{1 temps caractéristiques/décade: } \mathbb{T}_{i1} = (\tau_{i1}^c) = \begin{pmatrix} 10^{0.5} \\ 10^{1.5} \\ 10^{2.5} \end{pmatrix} \text{ s.} \end{array} \right.$$

On remarque que plus le nombre de temps caractéristiques est élevé, plus l'erreur est faible. En effet, l'erreur sur le potentiel avec des fonctions de relaxation à trois temps caractéristiques est dix fois plus faible que celle relative aux

fonctions de relaxation à un seul temps caractéristique. Néanmoins, on peut se contenter d'un seul temps caractéristique puisque l'erreur dans ce cas est inférieure à  $3 \cdot 10^{-3}$  ce qui peut être considéré comme satisfaisant, d'autant plus que le temps de calcul est plus faible. La forme des fonctions de relaxation choisie est donc celle représentée par (II.75).

**Remarque 3.4** On remarque que la forme de  $Err$  (relation (II.74)) est corroborée par les courbes de la figure 3.1 puisque, en dehors de l'intervalle  $[t_0, t_1]$ , l'erreur est inférieure à  $2 \cdot 10^{-4}$ .

### 3.4.4 Choix de la base de temps caractéristiques

Ayant choisi le nombre de temps caractéristiques par décade, il s'agit maintenant de déterminer ces temps caractéristiques. Pratiquement, les temps caractéristiques sont déterminés expérimentalement. En effet, par des essais de relaxation simple, on peut déterminer les différents temps caractéristiques du matériau à modéliser.

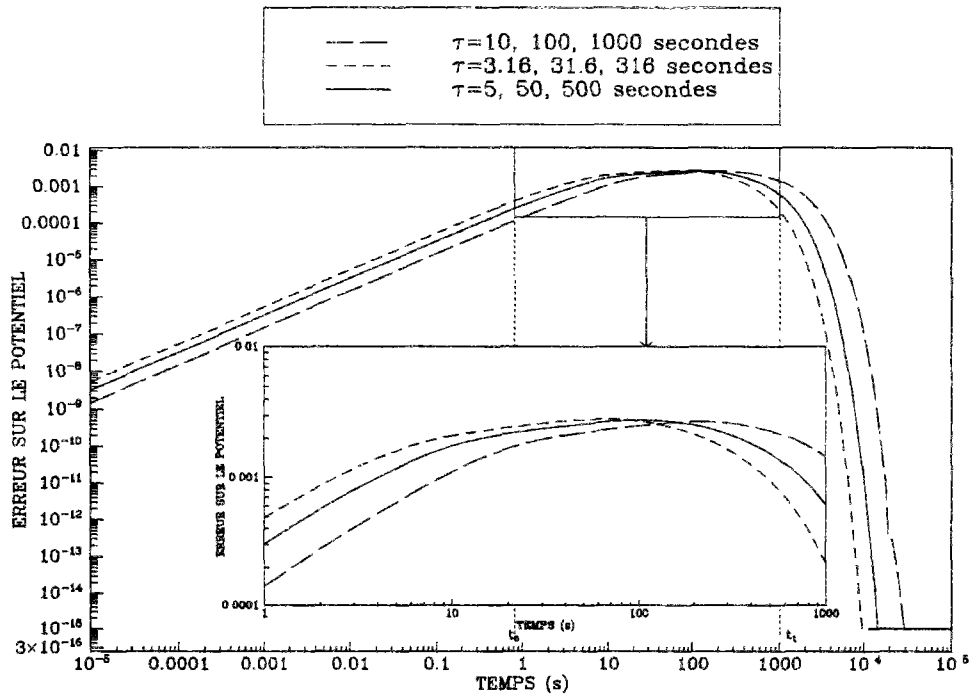


FIG. 3.2 - Erreur sur le potentiel: choix de la base de temps caractéristiques

Pour nos simulations, nous avons choisi différents groupes de temps caractéristiques purement théoriques. Pour effectuer un choix entre ces différents groupes, nous avons réalisé des simulations en traction/relaxation identiques aux précédentes (élongation  $\lambda_t = 2$ ) avec trois valeurs différentes pour le tenseur  $\mathbb{T}$ :

$$(\mathbb{T}_1)_{i1} = \begin{pmatrix} 10^{0.5} \\ 10^{1.5} \\ 10^{2.5} \end{pmatrix}, (\mathbb{T}_2)_{i1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 50 \\ 500 \end{pmatrix}, (\mathbb{T}_3)_{i1} = \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

La courbe 3.2 représente l'évolution de l'erreur (II.74) en fonction du temps pour chaque groupe de temps caractéristiques. On constate une faible différence d'erreur entre chaque groupe. Cela prouve qu'une base de temps relativement bien choisie (ie les temps caractéristiques sont bien répartis dans le spectre) influence peu l'erreur sur le potentiel. Dans la suite, on prendra comme temps caractéristiques 5, 50 et 500 secondes. Brown [Brown, 1976] propose des formes exponentielles où chaque fonction mémoire  $r_i$  comporte un seul temps caractéristique. Cela conduit à une erreur (II.74) élevée (plus de 50%) comme le montre la figure 3.3.

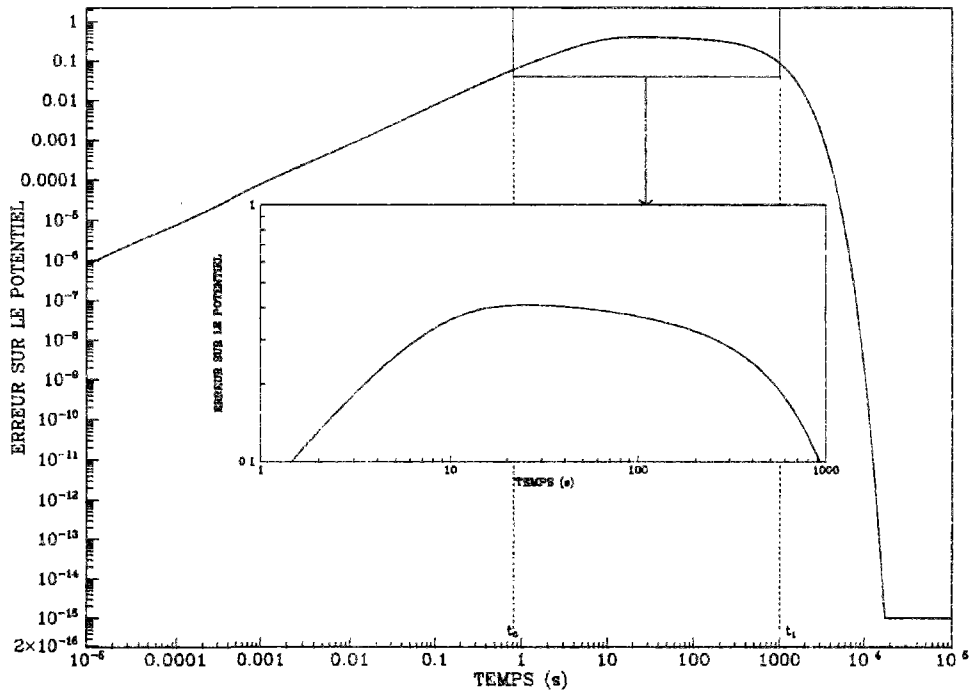


FIG. 3.3 - Erreur sur le potentiel pour un temps caractéristique par spectre

Cela signifie que, avec notre formulation, on ne peut représenter que les comportements de matériaux dont le spectre de relaxation est entièrement activé aux petites déformations (ie les fonctions mémoire  $r_1$  et  $r_2$  ont une contribution dans le spectre entier (cf. remarque 1.1)).

Par conséquent, nous retenons des fonctions de relaxation de la forme générale (II.75) avec des temps caractéristiques définis par:



$$\tau_1 = \frac{1}{c_{i1}} = 5 \text{ s.}, \quad \tau_2 = \frac{1}{c_{i2}} = 50 \text{ s.}, \quad \tau_3 = \frac{1}{c_{i3}} = 500 \text{ s.} \quad \text{pour } i = 1 \dots 10$$

### 3.4.5 Choix des coefficients des fonctions mémoire

Les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  ont été choisis de façon à avoir un processus physique admissible (dissipation positive). Une condition nécessaire est d'avoir  $\Psi_0 \geq \Psi_\infty \geq 0$ . De plus, les relations (II.42) imposent d'autres conditions sur  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  dans la mesure où les expressions sous les racines carrées doivent être positives.

**Remarque 3.5** *Brown [Brown, 1976] a fait un certain nombre de simplifications en généralisant le théorème de Cayley-Hamilton et en vertu de considérations physiques. Cela l'a conduit à choisir des coefficients  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  nuls pour  $i = 3$  et  $i = 4$  et négatifs pour  $i = 5$ . Pour notre part, nous avons choisi ces derniers très petits par rapport aux autres coefficients.*

## 3.5 Simulations

### 3.5.1 Choix des chargements à imposer

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'avec le choix des fonctions de relaxation effectué au paragraphe précédent (§3.4) et moyennant la linéarisation effectuée précédemment (§3.3), le modèle pseudo-linéaire approche de façon satisfaisante le comportement identifié par un développement de Fréchet d'ordre 4 (TAB. 3.1).

Pour ce faire, nous avons imposé une déformation, pour des essais de relaxation, sous une forme telle qu'elle permette de simuler une large gamme de chargements (voir figure 3.4):

1. Traction simple
2. Compression simple
3. Cisaillement dans la direction de l'éprouvette (notée "x")
4. Cisaillement dans la direction transverse (notée "y")
5. Chargements complexes
  - Traction ou compression suivie d'un cisaillement et inversement
  - Trois chargements différents successifs

L'intérêt de tels chargements est d'introduire des rotations dans la direction de chargement. Une telle déformation peut prendre la forme suivante:

$$\text{II.78} \quad \begin{cases} x(t) = [1 + (\lambda_t - 1) H(t - t_t)] X + \lambda_{c1} H(t - t_{c1}) Y \\ y(t) = \lambda_{c2} H(t - t_{c2}) X + Y \\ z(t) = Z \end{cases}$$

où les différents coefficients sont:

$$\begin{cases} \lambda_t & : \text{élongation en traction dans la direction "x"} \\ t_t & : \text{instant de début de traction} \\ \lambda_{c1} & : \text{élongation en cisaillement dans la direction "x"} \\ t_{c1} & : \text{instant de début de cisaillement associé à } \lambda_{c1} \\ \lambda_{c2} & : \text{élongation en cisaillement dans la direction "y"} \\ t_{c2} & : \text{instant de début de cisaillement associé à } \lambda_{c2} \end{cases}$$

Les différentes directions de chargements sont représentées sur la figure 3.4.

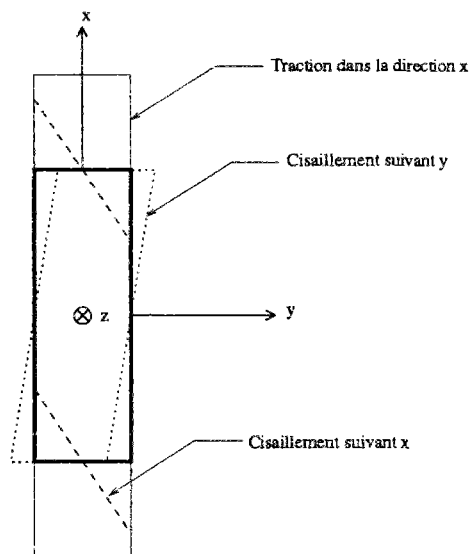


FIG. 3.4 - Différentes directions de chargement

Pour être suffisamment général, nous avons fait des simulations pour les différents cas cités auparavant. Elles sont réunies dans le tableau TAB. 3.4.

**Remarque 3.6** Nous avons appelé traction simple (ou compression simple) un chargement tel que  $\lambda_t \neq 0$ ,  $\lambda_{c1} = 0$  et  $\lambda_{c2} = 0$ . Cela n'est pas la définition classique parce que, en général, les bords sont libres.

Chargement	$\lambda_t$	$t_t$	$\lambda_{c1}$	$t_{c1}$	$\lambda_{c2}$	$t_{c2}$
A	2	0	0	0	0	0
B	1	0	2	0	0	0
C	0.3	0	0	0	0	0
D	2	0	0.5	1	0	0
E	1.5	1	2	0	0	0
F	0.2	10	1.2	10	0	0
G	2	0	0.5	1	0.3	100
H	0.1	0	0.8	100	0.5	1
I	1.2	100	1	1	2	0

TAB. 3.4 - Différents types de chargements simulés

### 3.5.2 Etude du chargement G

Dans ce paragraphe, on se limite à l'étude du chargement G, les autres se trouvant en annexe C. Pour ce chargement, on note que les potentiels et les contraintes (de Fréchet et pseudo-linéaire) sont proches avec une erreur sur les potentiels (II.74) inférieure à 1% comme le montre la figure 3.5. En effet, on remarque qu'ils coïncident aux temps courts ( $Err \leq 10^{-4}$ ) et aux temps longs ( $Err \leq 10^{-5}$ ) comme le supposait le modèle. Pour les temps intermédiaires, les contraintes pseudo-linéaires se superposent aux contraintes de Fréchet avec une erreur sur le potentiel si faible que l'on peut conclure à la validité du modèle. On constate, en effet, que les rotations d'axe de sollicitation n'affectent pas la contrainte pseudo-linéaire, bien qu'elles se situent dans l'intervalle de temps  $[t_0, t_1]$  qui est l'intervalle où l'erreur est la plus élevée.

D'autre part, on remarque que la comparaison entre les potentiel de Fréchet d'ordre 2 et 4 montre que les termes d'ordre supérieur à deux ne sont pas négligeables. Cela justifie le fait que l'on peut approcher le potentiel de Fréchet d'ordre 4 par le potentiel pseudo-linéaire d'ordre 2. Les autres chargements (voir annexe C) nous permettent de tirer les mêmes conclusions que pour le chargement G. Ces simulations montrent que le comportement du matériau isotrope que l'on a choisi, représenté par un potentiel d'énergie libre sous forme d'un développement de Fréchet d'ordre 4, peut être approché par un comportement pseudo-linéaire dont le potentiel d'énergie libre est défini par (II.32). Ce résultat est très peu dépendant du choix particulier des paramètres définissant le potentiel d'énergie libre. En effet, la connaissance d'un comportement aux temps courts et aux temps longs nous permet de l'approcher à chaque instant. Notons que tous ces chargements sont en grandes déformations et que, bien que l'identification se fasse en petites déformations, cela affecte peu le justesse du modèle.

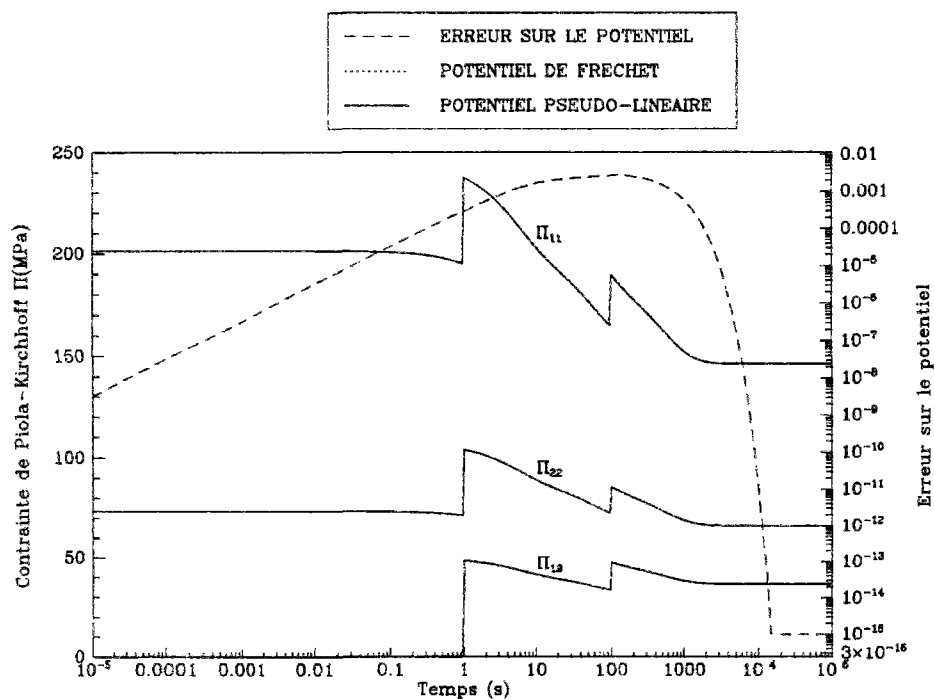


FIG. 3.5 - Contrainte de Piola-Kirchhoff 2 et erreur sur le potentiel de Fréchet pour le chargement  $G$

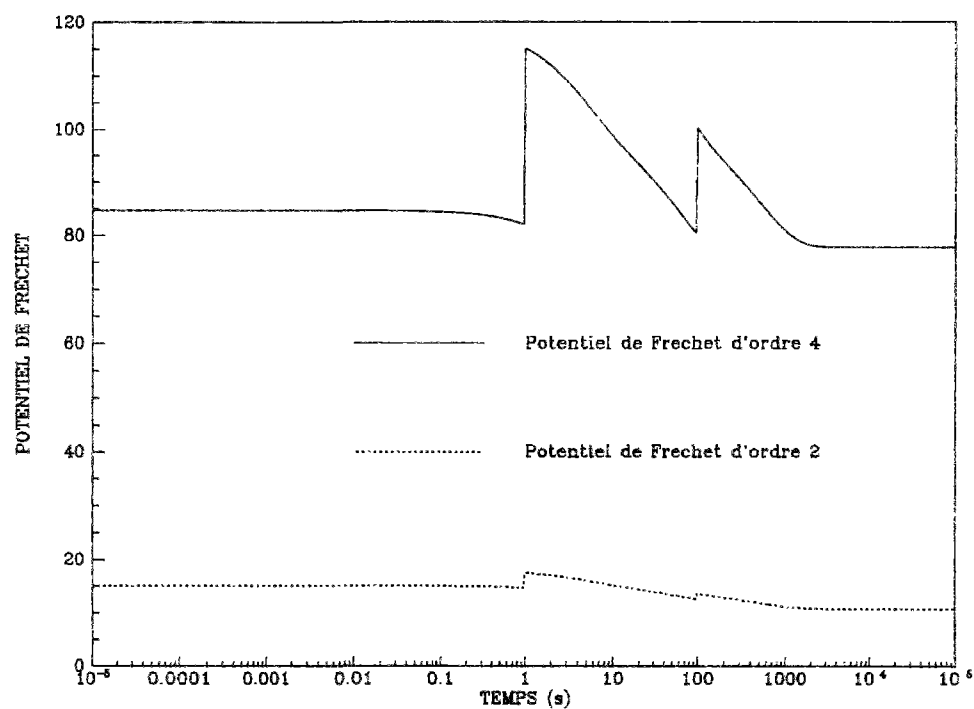


FIG. 3.6 - Comparaison entre les potentiels de Fréchet d'ordre 2 et 4

Les matériaux viscoélastiques sont des matériaux dissipatifs. Un modèle viscoélastique non linéaire en grandes déformations doit être en mesure de prédire l'énergie dissipée à chaque instant. Pour montrer que le modèle pseudo-linéaire répond à cette contrainte, nous allons effectuer, dans le chapitre suivant, une étude thermodynamique.



## Chapitre 4

# Etude thermodynamique

Dans ce chapitre, on utilise le matériau viscoélastique identifié au chapitre précédent et on en détermine les différentes grandeurs thermodynamiques qui le caractérisent.

### 4.1 Oscillations en extension simple

L'évaluation de la puissance dissipée peut être faite dans le cas d'essais cycliques en extension simple qui est l'un des essais les plus classiques mettant en jeu des oscillations (en traction/compression) pour la mise en évidence de la dissipation. Imposons une déformation de la forme:

$$\underline{\underline{\mathbb{F}}}(t) = \begin{pmatrix} l_0 + \delta l \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $l_0$  est la déformation moyenne,  $\delta l$  la demi-amplitude et  $T$  la période d'oscillation.

Les simulations que l'on a faites ont été obtenues en prenant:

$$\begin{cases} l_0 = 1 \\ \delta l = 0.5 \\ T = 50 \text{ secondes} \\ \text{Nombre de cycles: } N = 50 \end{cases}$$

On peut alors évaluer la contrainte de Piola-Kirchhoff 2 sur l'ensemble des cycles. Sur la figure 4.1, nous avons tracé la déformation de Green-Lagrange imposée et la contrainte de Piola-Kirchhoff 2 induite en fonction du temps. Sur cette figure, la différence de phase entre contrainte et déformation n'est pas évidente à constater.

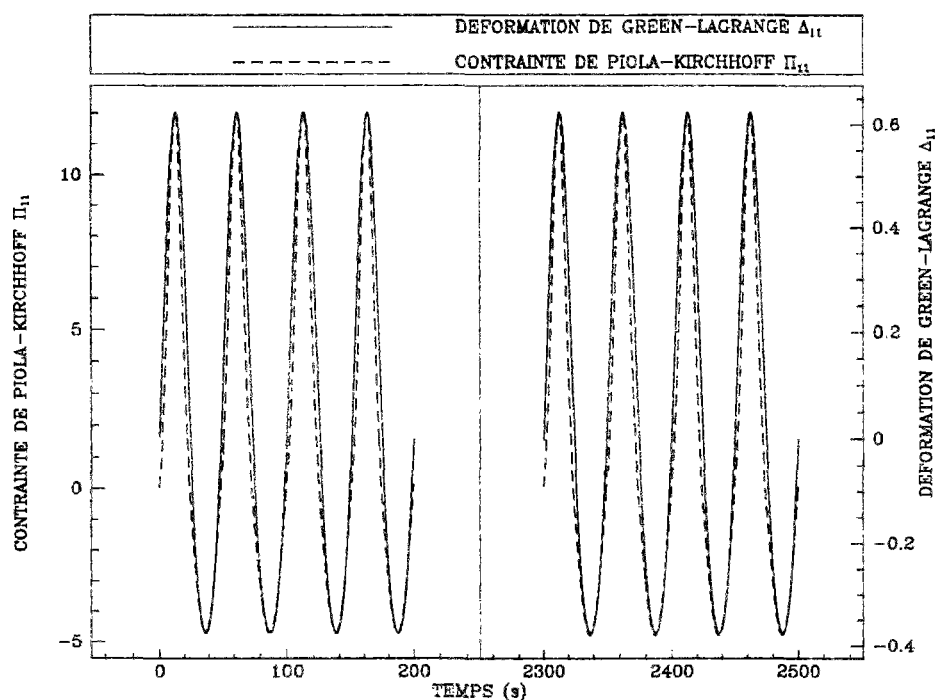


FIG. 4.1 - Comparaison de la phase entre la déformation de Green-Lagrange et la contrainte de Piola-Kirchhoff

En revanche, si on trace la contrainte de Piola-Kirchhoff 2 en fonction de la déformation de Green-Lagrange (figure 4.2), on voit clairement un déphasage entre les deux grandeurs et la surface de la courbe correspond à la puissance dissipée au cours du chargement cyclique.

On peut également évaluer analytiquement la puissance dissipée en utilisant (II.58) soit avec le potentiel pseudo-linéaire (II.39) soit le potentiel de Fréchet (TAB. 3.3). Il paraît clair que la première méthode est plus simple à utiliser que la seconde qui nécessite de nombreuses intégrations d'ordre 2, 3 et 4. C'est pour cette raison que l'on s'est contenté de la première solution pour calculer la puissance dissipée. Une autre grandeur utile et nécessaire dans les calculs thermodynamiques est le taux de dissipation  $\frac{dD}{dt}$ . La figure 4.3 montre les résultats obtenus relatifs à la puissance dissipée et au taux de dissipation. On remarque que la puissance dissipée est toujours positive au cours du cycle ce qui est nécessaire pour avoir un processus thermodynamiquement admissible, le matériau étant, bien entendu, dissipatif. On constate également que la puissance dissipée augmente rapidement au début du cycle (élongation moyenne atteinte), se stabilise au milieu du cycle (élongation maximale atteinte), puis augmente à nouveau rapidement et se restabilise à la fin du cycle (élongation minimale atteinte). Le taux de dissipation a l'allure d'une double sinusoïde paramétrée par les quatre



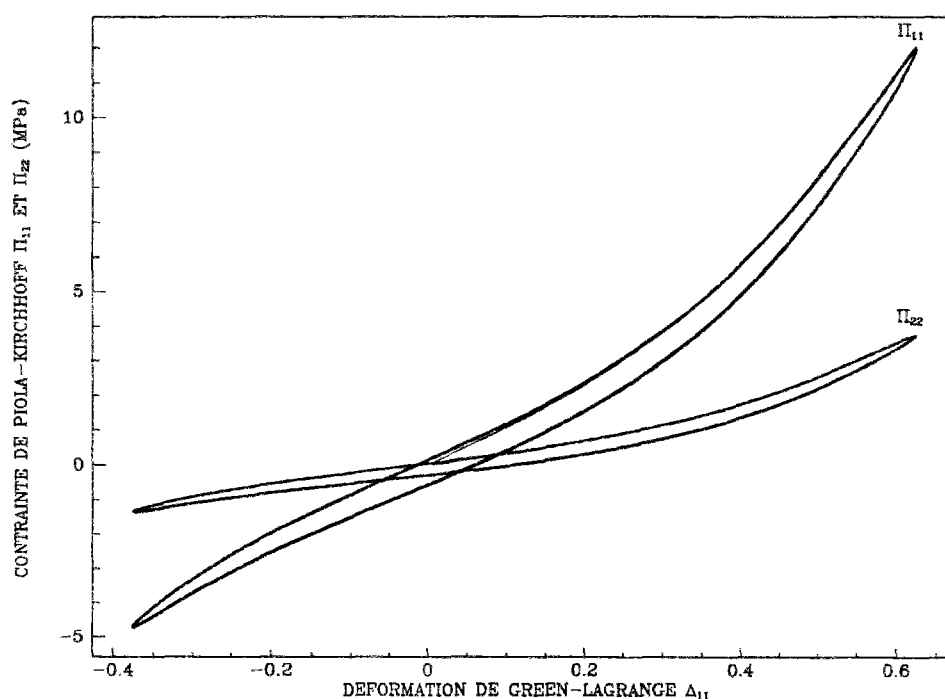


FIG. 4.2 - Variations de la contrainte de Piola-Kirchhoff en fonction de la déformation de Green-Lagrange

phases de la puissance dissipée.

La figure 4.4 nous montre l'évolution de l'énergie dissipée au cours du temps. On constate qu'elle est croissante ce qui est légitime puisque le matériau est dissipatif et que, par conséquent, à chaque instant, il dissipe de l'énergie.

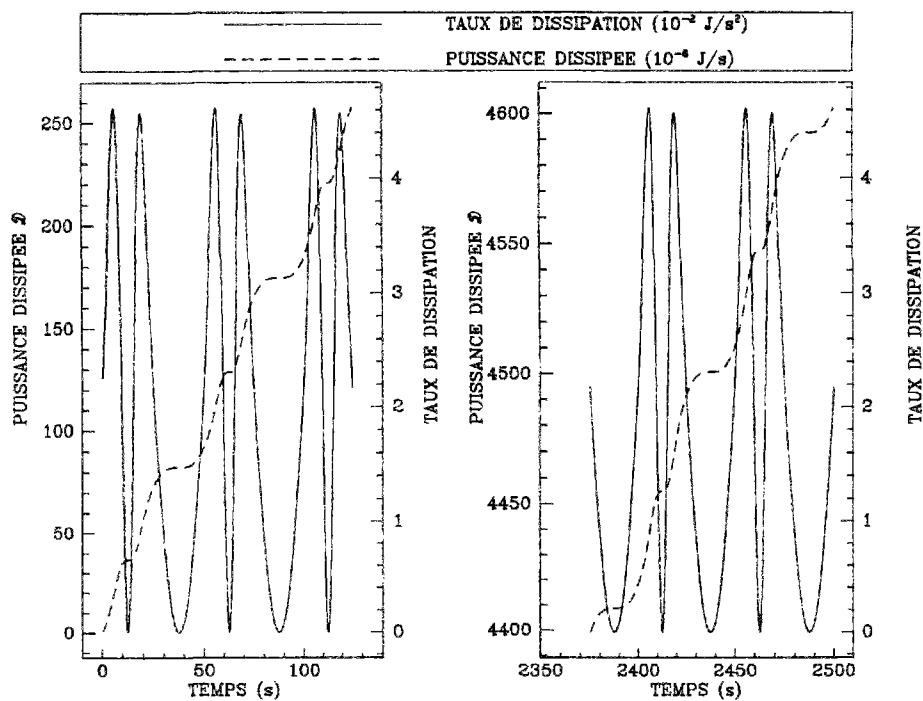


FIG. 4.3 - Variations de la puissance dissipée et du taux de dissipation en fonction du temps

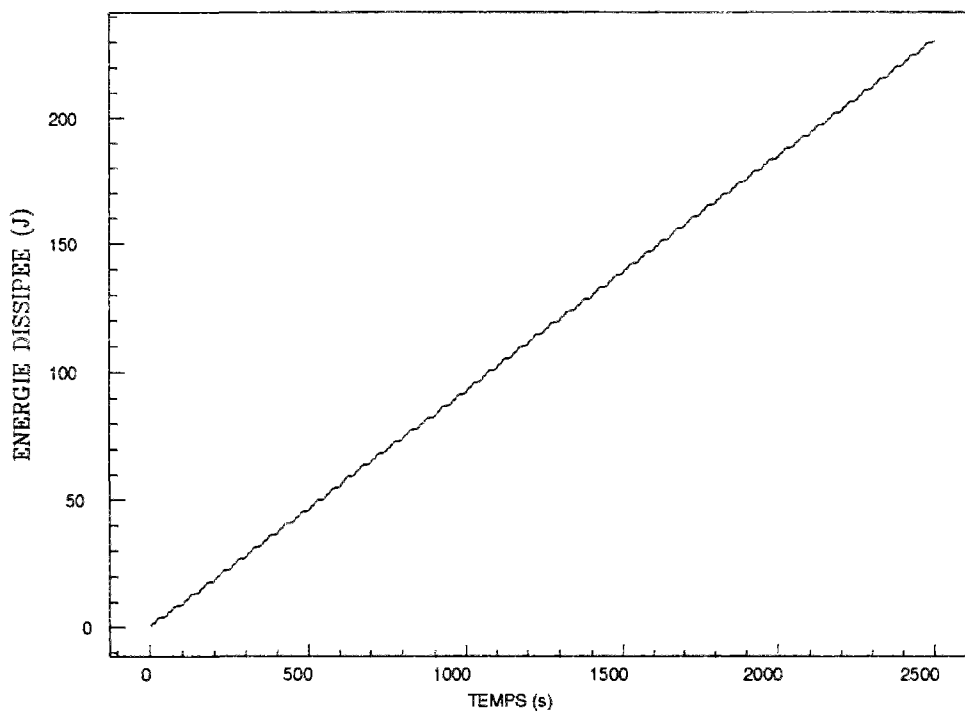


FIG. 4.4 - Variations de l'énergie dissipée en fonction du temps pour des oscillations en traction

## 4.2 Oscillations en extension simple autour d'une position hors équilibre

Effectuons le même chargement oscillatoire en traction que précédemment autour d'une élongation différente de l'unité. Un tel chargement nous permettra de comparer le caractère dissipatif en fonction du chargement imposé. Imposons donc le chargement cyclique précédent avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_0 = 3 \\ \delta l = 0.5 \\ T = 50 \text{ secondes} \\ \text{Nombre de cycles: } N = 50 \end{array} \right.$$

Ce chargement induit une évolution de la contrainte de Piola-Kirchhoff 2  $\Pi_{11}$  fortement en déphasage par rapport à la déformation de Green-Lagrange  $\Delta_{11}$  comme le montre la figure 4.5. Cette figure montre que ce dernier cas engendre, pendant les premiers cycles, une plus forte dissipation par rapport au cas précédent (autour de la position d'équilibre). En effet, on remarque que la contrainte se stabilise beaucoup plus tard, effet dû à la relaxation du matériau autour de la position moyenne hors équilibre. On remarque aussi que, dans le cas présent, la raideur apparente du matériau diminue avec le temps.

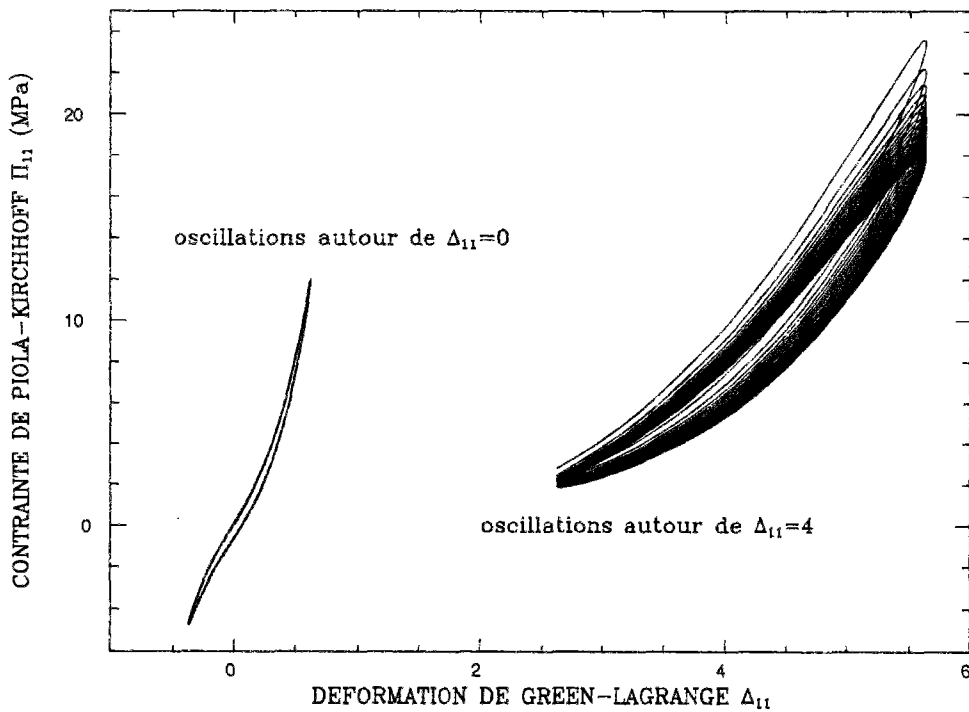


FIG. 4.5 - Variations de la contrainte de Piola-Kirchhoff  $\Pi_{11}$  en fonction de la déformation de Green-Lagrange  $\Delta_{11}$  (cas hors équilibre)

Cela est confirmé par l'illustration de la figure 4.6 qui montre l'évolution de l'énergie dissipée en fonction du temps. On constate que, pendant les premiers cycles, le second cas dissipe plus d'énergie avant de se stabiliser au même niveau que le cas précédent. En outre, on remarque que la pente du dernier cas diminue en fin d'oscillations. Cela rejoint la remarque concernant la diminution de la raideur apparente.

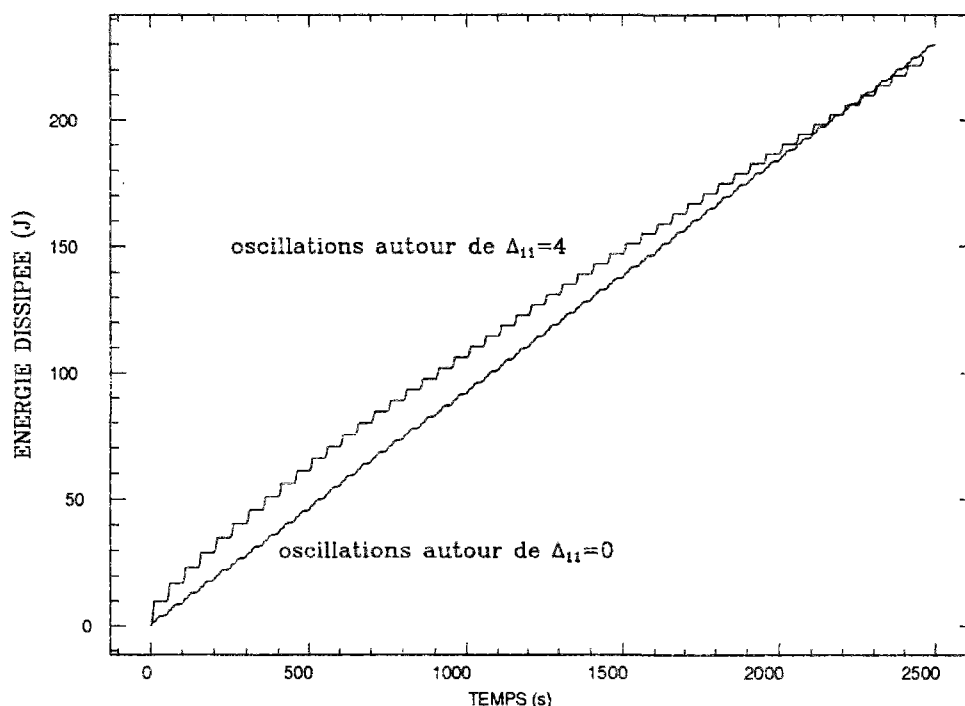


FIG. 4.6 - Variations de l'énergie dissipée en fonction du temps pour des oscillations en traction autour d'une élancement hors équilibre

### 4.3 Oscillations en cisaillement

On peut faire les mêmes conclusions en considérant un essai d'oscillations en cisaillement. Considérons le chargement suivant:

$$\underline{\underline{F}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & l_0 + \delta l \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange a donc la forme:

$$\underline{\underline{\Delta}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left[ l_0 + \delta l \sin \left( \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right] & 0 \\ \frac{1}{2} \left[ l_0 + \delta l \sin \left( \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right] & \left[ l_0 + \delta l \sin \left( \frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \right]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et effectuons une simulation avec les entrées suivantes:

$$\begin{cases} l_0 = 0 \\ \delta l = 2 \\ T = 50 \text{ secondes} \\ \text{Nombre de cycles: } N = 50 \end{cases}$$

Les courbes 4.7 et 4.8 montrent les variations des composantes de la contrainte de Piola-Kirchhoff 2 en fonctions de celles de la déformation de Gree-Lagrange. Toutefois, ces courbes (figures 4.7 et 4.8) sont à interpréter avec précaution, car n'entrent en considération dans le calcul de la puissance dissipée que les courbes  $\Pi_{12} = f(\Delta_{12})$  et  $\Pi_{22} = f(\Delta_{22})$ ,  $\Delta_{11}$  étant nul. Mais il est intéressant de voir l'évolution des différentes composantes de la contrainte en fonction de celles de la déformation.

Pour ce qui est de la puissance dissipée (figure 4.9), on constate qu'elle a la même évolution que dans le cas de la traction, avec les quatre phases distinctes:

- Croissance rapide au début du cycle
- Stabilisation à la demi période (élongation maximale)
- Croissance rapide
- Stabilisation à la fin du cycle (élongation minimale)

Une différence notable entre la traction et le cisaillement est la variation de l'énergie dissipée qui, dans le dernier cas, est pratiquement linéaire comme le montre la figure 4.10.

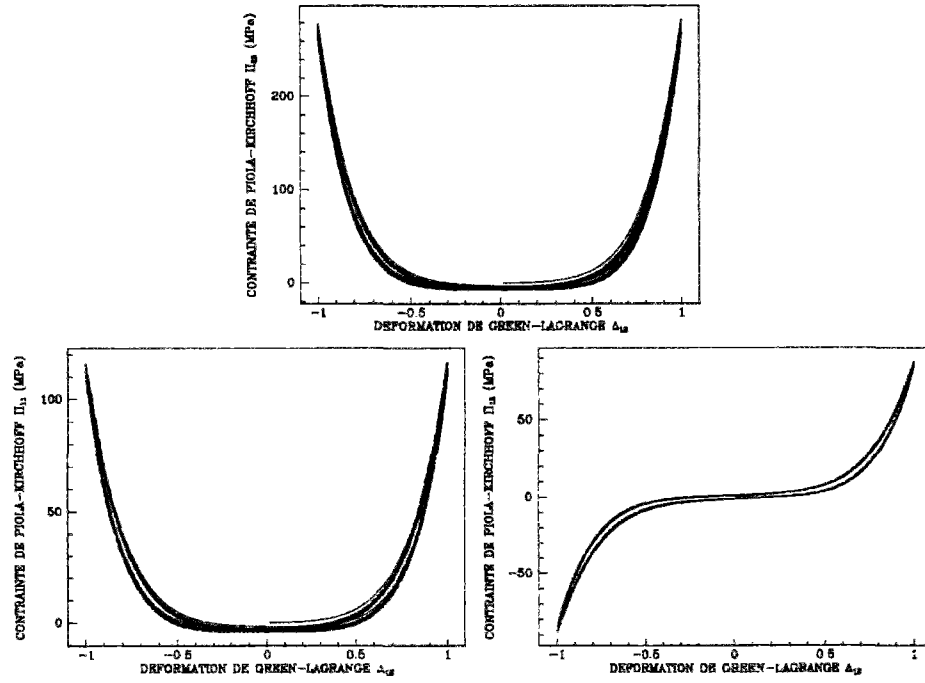


FIG. 4.7 - Variations de la contrainte de Piola-Kirchhoff en fonction de la déformation de Green-Lagrange  $\Delta_{12}$

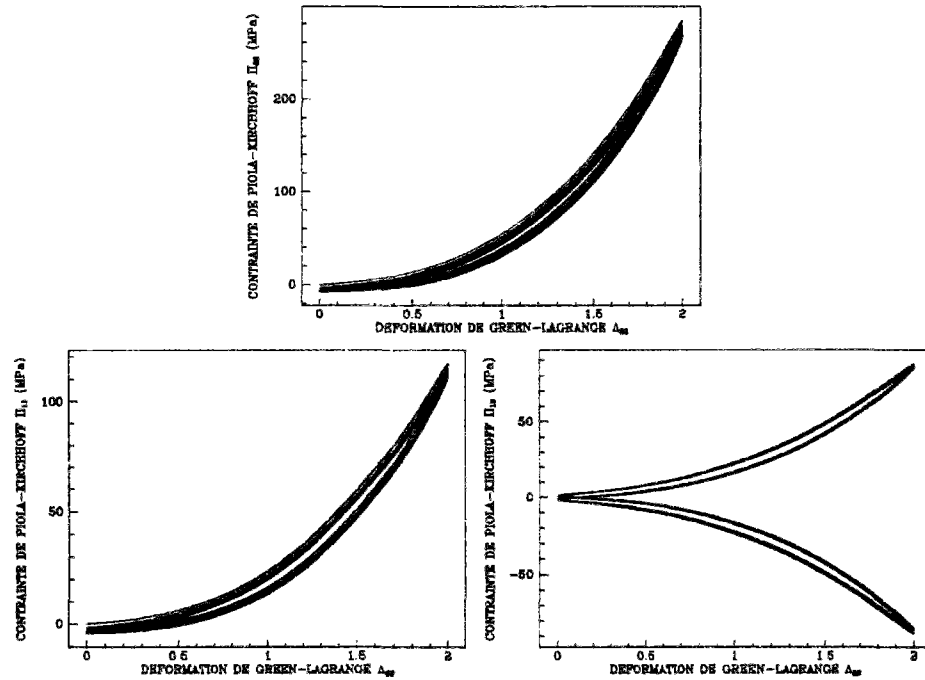


FIG. 4.8 - Variations de la contrainte de Piola-Kirchhoff en fonction de la déformation de Green-Lagrange  $\Delta_{22}$

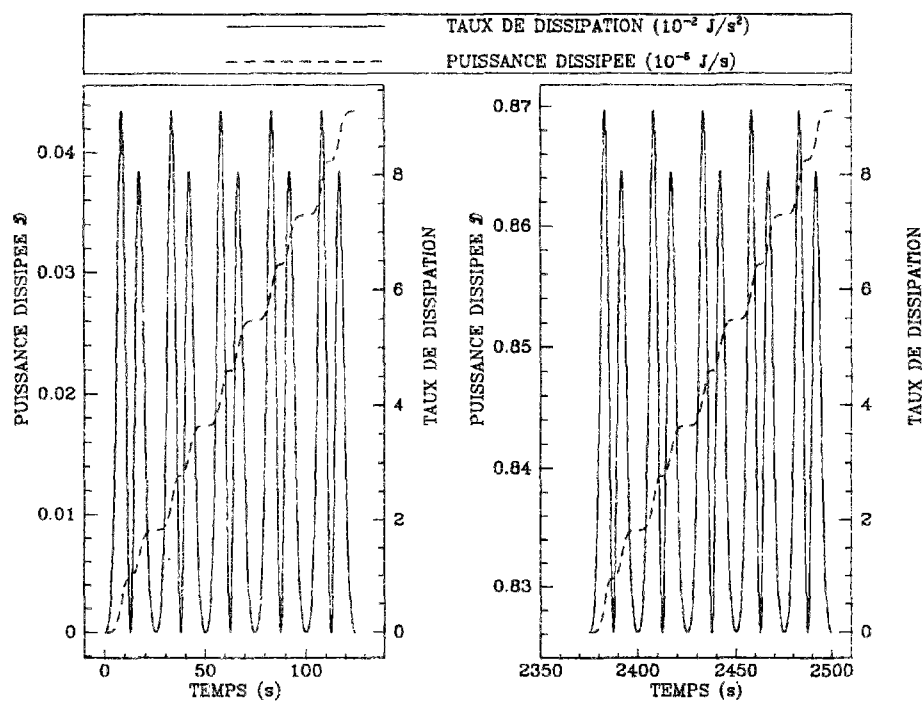


FIG. 4.9 - Variations de la puissance dissipée et du taux de dissipation en fonction du temps

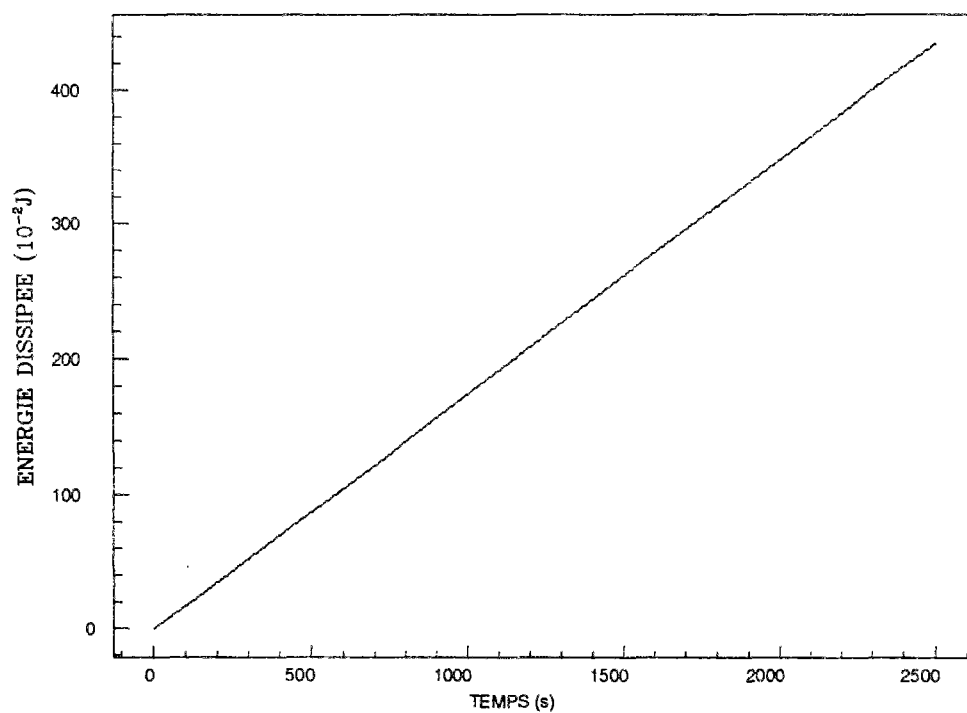


FIG. 4.10 - Variations de l'énergie dissipée en fonction du temps pour des oscillations en cisaillement

## Conclusion de la deuxième partie

Dans cette partie, nous avons construit un modèle viscoélastique non linéaire en grandes déformations. L'intérêt que présente ce modèle (appelé pseudo-linéaire) est d'être simple et facilement identifiable. Ce modèle, développé en approche Lagrangienne, suppose l'existence d'une mesure de déformation  $\underline{\underline{E}}$  qui permette d'écrire le potentiel d'énergie libre sous forme quadratique. Un tel potentiel permet alors de relier la déformation linéarisante à la contrainte  $\underline{\underline{S}}$  qui lui est énergétiquement associée par une loi linéaire (d'où le nom donné au modèle) à travers un tenseur de relaxation d'ordre 4.

Par application des principes thermodynamiques, nous avons développé les lois de comportement et la dissipation associées au modèle. Nous avons vu, dans le cadre d'un exemple, que le comportement issu de ce modèle présentait une bonne concordance avec un comportement fictif identifié par un potentiel d'énergie libre écrit sous forme d'un développement de Fréchet à l'ordre 4. Les différentes simulations que nous avons présentées, relatives aux différents chargements étudiés, correspondent à des chargements en grandes déformations. Cela montre que la procédure d'identification par équivalence aux petites déformations est très valable.

Enfin, nous avons montré l'accessibilité aux différentes grandeurs thermodynamiques (dissipation, puissance dissipée, taux de dissipation) par des essais cycliques en traction/compression et en cisaillement.



Troisième partie

Formulations variationnelles et  
méthodes numériques de  
résolution



# Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux différentes méthodes d'obtention et de résolution de formulations variationnelles associées au problème considéré. Nous évoquerons la méthode de Gurtin, [Gurtin & Sternberg, 1962], [Gurtin, 1963<sub>a</sub>], [Gurtin, 1963<sub>b</sub>], [Gurtin, 1964] qui a été reprise par de nombreux auteurs (Leitman [Leitman, 1966], Reddy [Reddy, 1976] entre autres) et qui traite le cas de la viscoélasticité linéaire et de sa résolution en se ramenant au cas élastique par la transformée de Laplace-Carson. Nous étudierons par la suite l'extension par Huet [Huet, 1972], [Huet, 1974], [Huet, 1985], [Huet, 1992] des théorèmes établis par Gurtin. Huet introduit les concepts de pseudo-convolution et de pseudo-biconvolution grâce auxquels il établit des théorèmes de minimum par l'introduction de nouvelles fonctionnelles définies dans l'espace physique occupé par le corps viscoélastique et dans l'espace des histoires locales. Huet montre que ces théorèmes sont plus «forts» que les théorèmes de stationnarité établis par Gurtin. Puis, nous développerons une méthodologie de résolution des problèmes hyperélastiques (compressibles et incompressibles). Nous nous intéressons à la méthode du lagrangien augmenté introduite par Rockafellar, [Rockafellar, 1973], Fortin, Glowinski et Le Tallec dans de nombreux travaux (par exemple [Fortin & Glowinski, 1982], [Glowinski & Le Tallec, 1989]). Ces deux cas (viscoélasticité linéaire et hyperélasticité) sont englobés par le modèle pseudo-linéaire et peuvent s'avérer intéressants dans la résolution du problème pseudo-linéaire. En effet, la viscoélasticité linéaire est traitée en petites déformations par une approche fonctionnelle dans un espace temporel. En revanche, l'hyperélasticité est traitée en grandes déformations en quasistatique. Ces deux approches nous permettent de proposer une méthodologie de résolution du problème pseudo-linéaire dans la mesure où la première nous permet, via la transformée de Laplace-Carson, de nous ramener au cas hyperélastique que nous résolvons par la seconde approche. Mais une telle formulation présente certaines limitations qui nous conduisent à proposer une autre formulation basée sur la recherche d'une fonctionnelle, associée au modèle pseudo-linéaire, comme étant la somme des énergies totale et dissipée. Puis, nous proposons un schéma numérique de résolution du problème en déplacements uniquement puisque nous approchons au premier ordre la relation liant la déformation linéarisante au gradient du déplacement, ce qui se justifie si le pas de temps est suffisamment petit.



# Chapitre 1

## Cas de la viscoélasticité linéaire

Dans ce chapitre, nous faisons une revue bibliographique des différentes méthodes variationnelles relatives à la viscoélasticité linéaire en petites déformations. Dans ce cadre-là, nous exposons les théorèmes de stationnarité de Gurtin, ceux de Nakamura et de Sewell en espace transformé ainsi que leur généralisation par Huet.

### 1.1 Définitions et position du problème

Le problème à résoudre consiste à trouver un état {déplacement, déformation, contrainte} qui satisfasse les équations de champs et remplisse les conditions aux limites et les conditions initiales. Avant de développer cette théorie, il convient de définir certaines notions qui vont servir dans l'établissement de théorèmes variationnels [Gurtin & Sternberg, 1962], [Gurtin, 1963<sub>a</sub>].

#### ♡ Définition 1.1 Intégrale de Stieltjes

Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions de l'espace et du temps,  $f * dg$  est la fonction définie par l'intégrale de Stieltjes:

$$[f * dg](\mathbf{x}, t) = \int_{\tau=-\infty}^t f(\mathbf{x}, t - \tau) dg(\mathbf{x}, \tau)$$

lorsque celle-ci a un sens.

#### ♡ Définition 1.2 Transformée de Laplace-Carson

Si  $g$  est une fonction de l'espace et du temps, on définit sa transformée de Laplace-Carson temporelle par:

$$\mathcal{C}[g(\mathbf{x}, t)] = g^*(\mathbf{x}, p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} g(\mathbf{x}, t) dt$$

pour  $p > 0$

♥ **Définition 1.3 Variation d'une fonctionnelle**

Soit  $\mathcal{L}\{\cdot\}$  une fonctionnelle définie dans un sous-espace  $K$  d'un espace linéaire  $L$ . Soit, de plus,

$$\text{III.1} \quad S, \tilde{S} \in L, \quad S + \alpha \tilde{S} \in K, \quad \forall \alpha \in ]-\infty, +\infty[$$

On définit la notation, que l'on appelle *dérivée Gâteaux* de  $\mathcal{L}$  pour tous les champs  $\tilde{S}$  compatibles (c'est à dire vérifiant (III.1)):

$$\text{III.2} \quad \delta_{\tilde{S}} \mathcal{L}\{S\} = \left. \frac{d}{d\alpha} \mathcal{L}\{S + \alpha \tilde{S}\} \right|_{\alpha=0}$$

On dit que la variation de  $\mathcal{L}\{\cdot\}$  est nulle en  $S$  et on écrit

$$\delta_{\tilde{S}} \mathcal{L}\{S\} = 0 \text{ dans } K$$

à chaque fois que  $\delta_{\tilde{S}} \mathcal{L}\{S\}$  existe et est nulle quel que soit le choix de  $\tilde{S}$  compatible avec (III.1).

On notera  $\Omega$  une région ouverte de l'espace euclidien tridimensionnel,  $\bar{\Omega}$  sa fermeture et  $\partial\Omega$  sa frontière. De plus,  $\partial\Omega_{u_t}$  et  $\partial\Omega_{\sigma_t}$  sont deux sous ensembles complémentaires de  $\partial\Omega$  ( $\partial\Omega = \partial\Omega_{u_t} \cup \partial\Omega_{\sigma_t}$ ,  $\partial\Omega_{u_t} \cap \partial\Omega_{\sigma_t} = \emptyset$ ). En viscoélasticité linéaire, sous l'hypothèse des petites perturbations, les équations de champs sont les suivantes [Gurtin, 1963<sub>a</sub>]:

## 1. Relations déformation-déplacement

$$\text{III.3} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}) \text{ dans } \Omega \times ]-\infty, \infty[$$

## 2. Equations d'équilibre

$$\text{III.4} \quad \sigma_{ij,j} + \mathbf{f}_i = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ dans } \Omega \times ]-\infty, \infty[$$

## 3. Relations contrainte-déformation

– En relaxation

$$\text{III.5} \quad \sigma_{ij} = \mathbb{R}_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} \text{ dans } \Omega \times ]-\infty, \infty[$$

– En fluage

$$\text{III.6} \quad \varepsilon_{ij} = \mathbb{J}_{ijkl} * d\sigma_{kl} \text{ dans } \Omega \times ]-\infty, \infty[$$

## 4. Conditions initiales

$$\text{III.7} \quad \underline{\mathbf{u}}(x, t) = \underline{\underline{\mathbf{e}}}(x, t) = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(x, t) = 0 \text{ dans } \Omega \times ]-\infty, 0[$$

## 5. Conditions aux limites en déplacement

$$\text{III.8} \quad \underline{\mathbf{u}} = \hat{\underline{\mathbf{u}}} \text{ dans } \partial\Omega_u \times ]-\infty, \infty[$$

## 6. Conditions aux limites en contrainte

$$\text{III.9} \quad \underline{\mathbf{g}} = \hat{\underline{\mathbf{g}}} \text{ dans } \partial\Omega_\sigma \times ]-\infty, \infty[, \text{ avec } \mathbf{g}_i = \sigma_{ij} \cdot \mathbf{n}_j,$$

$\mathbf{n}_j$  étant la normale extérieure au corps considéré.

## 1.2 Principe variationnel en espace temporel

Dans cette partie, on utilise les notions de problème régulier, de solution régulière et d'état admissible [Gurtin, 1963<sub>a</sub>] dont les définitions nécessitent les notations suivantes:

- $\mathcal{G} = \mathcal{G} \left( \Omega, (\partial\Omega_{\alpha t})_{\alpha=u,\sigma}, \hat{\underline{\mathbf{u}}}, \hat{\underline{\mathbf{g}}}, \underline{\mathbf{f}}, \underline{\underline{\mathbb{R}}} \right)$  est le problème considéré en relaxation
- et  $\mathcal{J} = \mathcal{J} \left( \Omega, (\partial\Omega_{\alpha t})_{\alpha=u,\sigma}, \hat{\underline{\mathbf{u}}}, \hat{\underline{\mathbf{g}}}, \underline{\mathbf{f}}, \underline{\underline{\mathbb{J}}} \right)$  le problème en fluage.
- $\mathcal{S} = [\underline{\mathbf{u}}, \underline{\underline{\mathbf{e}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}]$  représente l'état solution du problème.

### ♥ Définition 1.4 Problème régulier

On dit que  $\mathcal{G} = \mathcal{G} \left( \Omega, (\partial\Omega_{\alpha t})_{\alpha=u,\sigma}, \hat{\underline{\mathbf{u}}}, \hat{\underline{\mathbf{g}}}, \underline{\mathbf{f}}, \underline{\underline{\mathbb{R}}} \right)$  est un problème régulier de type relaxation si:

1.  $\Omega$  est une région bornée dont la frontière  $\partial\Omega$  est la réunion d'un nombre fini de surfaces distinctes régulières et fermées et la fermeture  $\bar{\partial\Omega}_\alpha$  de chacun des sous-ensembles  $\partial\Omega_{\alpha t}$  est une surface régulière,
2.
  - $\hat{\underline{\mathbf{u}}}$  est une fonction vectorielle définie sur  $\bar{\partial\Omega}_u \times ]-\infty, \infty[$  qui s'annule sur  $\bar{\partial\Omega}_u \times ]-\infty, 0[$  et qui est continue sur  $\bar{\partial\Omega}_u \times [0, \infty[$ ,
  - $\hat{\underline{\mathbf{g}}}$  est une fonction vectorielle définie sur  $\bar{\partial\Omega}_\sigma \times ]-\infty, \infty[$  qui s'annule sur  $\bar{\partial\Omega}_\sigma \times ]-\infty, 0[$  et qui est continue sur  $\bar{\partial\Omega}_\sigma \times [0, \infty[$  et  $\hat{\underline{\mathbf{g}}}(\mathbf{x}, \cdot)$  est continue sur  $[0, \infty[$  pour tout  $\mathbf{x} \in \bar{\partial\Omega}_\sigma$ ,

–  $\underline{\mathbf{f}}$  est une fonction vectorielle définie sur  $\bar{\Omega} \times ]-\infty, \infty[$  qui s'annule sur  $\bar{\Omega} \times ]-\infty, 0[$  et qui est continue sur  $\bar{\Omega} \times [0, \infty[$ ,

3.  $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$  est une fonction (de l'espace et du temps) tensorielle d'ordre 4 définie sur  $\bar{\Omega} \times ]-\infty, \infty[$  qui s'annule sur  $\bar{\Omega} \times ]-\infty, 0[$  et qui est continûment différentiable sur  $\bar{\Omega} \times [0, \infty[$  ayant les propriétés de symétrie suivantes:

$$\mathbb{R}_{ijkl} = \mathbb{R}_{jikl} = \mathbb{R}_{klij} \quad \text{sur } \bar{\Omega} \times ]-\infty, \infty[$$

### ♡ Définition 1.5 Etat admissible

On dit que le vecteur ordonné  $\mathcal{S} = [\underline{\mathbf{u}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}}]$  est un état admissible sur  $\bar{\Omega} \times ]-\infty, \infty[$  si:

1.  $\underline{\mathbf{u}}$  est une fonction vectorielle définie sur  $\bar{\Omega} \times ]-\infty, \infty[$  alors que  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  sont des fonctions tensorielles symétriques d'ordre 2 sur  $\bar{\Omega} \times ]-\infty, \infty[$
2.  $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}}$  s'annulent sur  $\bar{\Omega} \times ]-\infty, 0[$  et sont continûment différentiables sur  $\bar{\Omega} \times [0, \infty[$

### ♡ Définition 1.6 Solution régulière

Soit  $\mathcal{G} = \mathcal{G} \left( \Omega, (\partial\Omega_{\alpha t})_{\alpha=u,\sigma}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{g}}, \underline{\mathbf{f}}, \underline{\underline{\mathbb{R}}} \right)$  un problème régulier de type relaxation. On dit alors que  $\mathcal{S} = [\underline{\mathbf{u}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}}]$  est une solution régulière de  $\mathcal{G}$  si:

1.  $\mathcal{S}$  est un état admissible sur  $\bar{\Omega} \times ]-\infty, \infty[$ ,
2.  $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}}$  satisfont les équations de champs (III.3), (III.4), (III.5) et les conditions aux limites (III.8), (III.9).

On obtient les mêmes définitions pour les problèmes de type fluage en remplaçant  $\mathcal{G}$  par  $\mathcal{J}$  et (III.5) par (III.6).

Dans la suite, nous n'évoquerons que les problèmes de type relaxation.

Un principe variationnel qui généralise le théorème de Hu Hai-Chang [Hu Hai-Chang, 1954], est le suivant:

♡ **Principe variationnel 1.1** Soit  $\mathcal{G} = \mathcal{G} \left( \Omega, (\partial\Omega_{\alpha t})_{\alpha=u,\sigma}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{g}}, \underline{\mathbf{f}}, \underline{\underline{\mathbb{R}}} \right)$  un problème régulier de type relaxation,  $K$  l'ensemble de tous les états admissibles dans



$\bar{\Omega} \times ]-\infty, \infty[$  et  $\mathcal{S} = [\underline{\mathbf{u}}, \underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}] \in K$ . Pour tout  $t \in ]-\infty, \infty[$ , on définit la fonctionnelle  $\mathcal{L}_t \{\cdot\}$  dans  $K$  par:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_t \{\mathcal{S}\} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathbb{R}_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} * d\varepsilon_{ij}] (\mathbf{x}, t) dx - \int_{\Omega} [\sigma_{ij} * d\varepsilon_{ij}] (\mathbf{x}, t) dx \\
 \text{III.10} \quad &- \int_{\Omega} [(\sigma_{ij,j} + \mathbf{f}_i) * d\mathbf{u}_i] (\mathbf{x}, t) dx + \int_{\partial\Omega_{u_t}} [\mathbf{g}_i * d\hat{\mathbf{u}}_i] (\mathbf{x}, t) da \\
 &+ \int_{\partial\Omega_{\sigma_t}} [(\mathbf{g}_i - \hat{\mathbf{g}}_i) * d\mathbf{u}_i] (\mathbf{x}, t) da
 \end{aligned}$$

Alors

$$\text{III.11} \quad \delta_{\bar{\mathcal{S}}} \mathcal{L}_t \{\mathcal{S}\} = 0 \text{ dans } K, \quad t \in ]-\infty, \infty[$$

si et seulement si  $\mathcal{S}$  est une solution régulière de  $\mathcal{G}$ .

Pour la démonstration de ce principe variationnel, on se référera aux travaux de Gurtin [Gurtin, 1963<sub>a</sub>], [Gurtin, 1963<sub>b</sub>]. On notera seulement que la variation de la fonctionnelle  $\mathcal{L}_t \{\mathcal{S}\}$  s'écrit:

$$\begin{aligned}
 \delta_{\bar{\mathcal{S}}} \mathcal{L}_t \{\mathcal{S}\} &= \int_{\Omega} [(\mathbb{R}_{ijkl} * d\varepsilon_{kl} - \sigma_{ij}) * d\tilde{\varepsilon}_{ij}] (\mathbf{x}, t) dx \\
 &- \int_{\Omega} [(\sigma_{ij,j} + \mathbf{f}_i) * d\tilde{\mathbf{u}}_i] (\mathbf{x}, t) dx \\
 \text{III.12} \quad &- \int_{\Omega} \left[ \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}) \right) * d\tilde{\sigma}_{ij} \right] (\mathbf{x}, t) dx \\
 &+ \int_{\partial\Omega_{u_t}} [(\hat{\mathbf{u}}_i - \mathbf{u}_i) * d\tilde{\mathbf{g}}_i] (\mathbf{x}, t) da \\
 &+ \int_{\partial\Omega_{\sigma_t}} [(\mathbf{g}_i - \hat{\mathbf{g}}_i) * d\tilde{\mathbf{u}}_i] (\mathbf{x}, t) da
 \end{aligned}$$

On remarque que les relations (III.3) à (III.9) annulent l'expression (III.12) et réciproquement [Gurtin, 1963<sub>a</sub>].

### 1.3 Principe variationnel en espace transformé

A partir du problème viscoélastique linéaire, on peut se ramener, par le biais de la transformée de Laplace-Carson, à un problème élastique linéaire en espace transformé. Ceci a pour but de simplifier le problème en supprimant les produits de convolution. Si on effectue les transformées de Laplace-Carson des relations de comportement (III.3) à (III.9), celles-ci deviennent [Nakamura & Horikawa, 1979], [Nakamura, 1979], [Salençon, 1983]:

#### 1. Relations déformation-déplacement

$$\text{III.13} \quad \varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j}^*(\mathbf{x}, p) + \mathbf{u}_{j,i}^*(\mathbf{x}, p)) \quad \text{dans } \Omega \times ]0, \infty[$$

#### 2. Equations d'équilibre

$$\text{III.14} \quad \sigma_{ij,j}^*(\mathbf{x}, p) + \mathbf{f}_i^*(\mathbf{x}, p) = 0, \quad \sigma_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = \sigma_{ji}^*(\mathbf{x}, p) \quad \text{dans } \Omega \times ]0, \infty[$$

#### 3. Relations contrainte-déformation

– En relaxation:

$$\text{III.15} \quad \sigma_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = \mathbb{R}_{ijkl}^*(\mathbf{x}, p) \varepsilon_{kl}^*(\mathbf{x}, p) \quad \text{dans } \Omega \times ]0, \infty[$$

– En fluage:

$$\text{III.16} \quad \varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = \mathbb{J}_{ijkl}^*(\mathbf{x}, p) \sigma_{kl}^*(\mathbf{x}, p) \quad \text{dans } \Omega \times ]0, \infty[$$

#### 4. Conditions initiales

$$\text{III.17} \quad \underline{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]-\infty, 0[$$

#### 5. Conditions aux limites en déplacement

$$\text{III.18} \quad \underline{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}, p) = \underline{\hat{\mathbf{u}}}^*(\mathbf{x}, p) \quad \text{dans } \partial\Omega_{u_t} \times ]0, \infty[$$

#### 6. Conditions aux limites en contrainte

$$\text{III.19} \quad \underline{\mathbf{g}}^*(\mathbf{x}, p) = \underline{\hat{\mathbf{g}}}^*(\mathbf{x}, p) \quad \text{dans } \partial\Omega_{\sigma_t} \times ]0, \infty[, \quad \text{avec } \mathbf{g}_i^* = \sigma_{ij}^* \mathbf{n}_j,$$

On remarque donc que les relations de comportement en espace transformé sont celles de l'élasticité classique.

Le principe variationnel 1.1 devient:

♡ **Principe variationnel 1.2** Soit  $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}^* \left( \Omega, (\partial\Omega_{\alpha t})_{\alpha=u,\sigma}, \hat{\underline{\mathbf{u}}}^*, \hat{\underline{\mathbf{g}}}^*, \underline{\mathbf{f}}^*, \underline{\underline{\mathbb{R}}}^* \right)$  un problème régulier de type relaxation,  $K$  l'ensemble de tous les états admissibles dans  $\bar{\Omega} \times ]0, \infty[$  et  $\mathcal{S}^* = [\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\underline{\varepsilon}}^*, \underline{\underline{\sigma}}^*] \in K$ . Pour tout  $p \in ]0, \infty[$ , on définit la fonctionnelle  $\mathcal{L}_p \{\cdot\}$  dans  $K$  par:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p \{\mathcal{S}^*\} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathbb{R}_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}^* \varepsilon_{ij}^*] (\mathbf{x}, p) dx - \int_{\Omega} [\sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^*] (\mathbf{x}, p) dx \\ \text{III.20} \quad &- \int_{\Omega} [(\sigma_{ij,j}^* + \mathbf{f}_i^*) u_i^*] (\mathbf{x}, p) dx + \int_{\partial\Omega_{u_t}} [\mathbf{g}_i^* \hat{\mathbf{u}}_i^*] (\mathbf{x}, p) da \\ &+ \int_{\partial\Omega_{\sigma_t}} [(S_i^* - \hat{\mathbf{g}}_i^*) u_i^*] (\mathbf{x}, p) da \end{aligned}$$

Alors

$$\text{III.21} \quad \delta_{\hat{\mathcal{S}}^*} \mathcal{L}_p \{\mathcal{S}^*\} = 0 \text{ dans } K, \quad p \in ]0, \infty[$$

si et seulement si  $\mathcal{S}^*$  est une solution régulière de  $\mathcal{G}^*$ .

## 1.4 Méthode du Hamiltonien généralisé

A partir des équations de comportement (III.13) à (III.19), on peut effectuer une représentation Hamiltonienne généralisée [Sewell, 1987]. Pour cela, on remplace d'abord la relation contrainte-déformation  $\sigma_{ij}^* (\mathbf{x}, p) = G_{ijkl}^* (\mathbf{x}, p) \varepsilon_{kl}^* (\mathbf{x}, p)$  par  $\sigma_{ij}^* (\mathbf{x}, p) = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}^*} (\mathbf{x}, p)$  où  $U$  est une énergie de déformation homogène, quadratique et strictement convexe des composantes indépendantes de la déformation dans l'espace temporel. L'avantage de cette formulation est qu'elle s'apparente au cas hyperélastique. On introduit par la suite les opérateurs suivants [Sewell, 1987]:

$$\text{III.22} \quad \bar{T} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i,j}^* (\mathbf{x}, p) + \mathbf{u}_{j,i}^* (\mathbf{x}, p)) \\ 0 \\ \frac{1}{2} (\mathbf{n}_i \mathbf{u}_j^* + \mathbf{n}_j \mathbf{u}_i^*) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T \underline{\underline{\sigma}}^* = \begin{bmatrix} -\sigma_{ij,j}^* \\ \mathbf{n}_i \sigma_{ij}^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec la notation

$$(\underline{\underline{\sigma}}^*, \bar{T} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^*) = \langle \underline{\underline{\mathbf{u}}}^*, T \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle$$

où:

$$\langle \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j \, dx + \int_{\partial\Omega_{u_t}} \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j \, d\Sigma_1 + \int_{\partial\Omega_{\sigma_t}} \mathbf{v}_j \mathbf{w}_j \, d\Sigma_2$$

On peut alors récrire les relations de comportement sous la forme:

$$\text{III.23} \quad \bar{T} \underline{\mathbf{u}}^* = \frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^*}, \quad T \underline{\underline{\sigma}}^* = \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathbf{u}}^*}, \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^*}$$

où:

$$\text{III.24} \quad \frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^*} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon}}^* \\ 0 \\ \frac{1}{2} (\mathbf{n}_i \hat{\mathbf{u}}_j^* + \mathbf{n}_j \hat{\mathbf{u}}_i^*) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathbf{u}}^*} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^* \\ \hat{\mathbf{g}}_i^* \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^*} = \begin{bmatrix} \sigma_{ij}^* - \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}^*} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sont les gradients du Hamiltonien généralisé:

$$\begin{aligned} \text{III.25} \quad H [\underline{\underline{\sigma}}^*; \underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\underline{\varepsilon}}^*] &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^* \cdot \varepsilon_{ij}^* - U [\underline{\underline{\varepsilon}}^*] + \mathbf{f}_i^* \cdot \mathbf{u}_i^*) \, dx \\ &- \int_{\partial\Omega_{u_t}} \sigma_{ij}^* \cdot \mathbf{n}_j \cdot \hat{\mathbf{u}}_i^* \, d\Sigma_1 + \int_{\partial\Omega_{\sigma_t}} \hat{\mathbf{g}}_i^* \cdot \mathbf{u}_i^* \, d\Sigma_2 \end{aligned}$$

De tels gradients s'expriment par la variation de  $H$  selon la forme suivante:

$$\text{III.26} \quad \delta H = \left( \delta \underline{\underline{\sigma}}^*, \frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^*} \right) + \left\langle \delta \underline{\mathbf{u}}^*, \frac{\partial H}{\partial \underline{\mathbf{u}}^*} \right\rangle + \left( \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^*, \frac{\partial H}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^*} \right)$$

On est alors amené à introduire la fonctionnelle selle suivante [Sewell, 1987]:

$$\begin{aligned} \text{III.27} \quad \mathcal{L} [\underline{\underline{\sigma}}^*; \underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\underline{\varepsilon}}^*] &= (\underline{\underline{\sigma}}^*, \bar{T} \underline{\mathbf{u}}^*) - H [\underline{\underline{\sigma}}^*; \underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\underline{\varepsilon}}^*] \\ &= \langle \underline{\mathbf{u}}^*, T \underline{\underline{\sigma}}^* \rangle - H [\underline{\underline{\sigma}}^*; \underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\underline{\varepsilon}}^*] \\ &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j}^* \cdot \mathbf{u}_i^* - \sigma_{ij}^* \cdot \varepsilon_{ij}^* + U [\underline{\underline{\varepsilon}}^*] - \mathbf{f}_i^* \cdot \mathbf{u}_i^*) \, dx \\ &+ \int_{\partial\Omega_{\sigma_t}} \mathbf{u}_i^* (\sigma_{ij}^* \cdot \mathbf{n}_j - \hat{\mathbf{g}}_i^*) \, d\Sigma_2 + \int_{\partial\Omega_{u_t}} \sigma_{ij}^* \cdot \mathbf{n}_j \cdot \hat{\mathbf{u}}_i^* \, d\Sigma_1 \end{aligned}$$

On obtient une fonctionnelle du même type que celle établie par Gurtin [Gurtin, 1963<sub>a</sub>] et Nakamura [Nakamura, 1979]. Elle est concave en  $\underline{\underline{\sigma}}^*$ , convexe en  $\underline{\mathbf{u}}^*$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ . Elle permet donc de générer les équations de comportement ainsi que des principes de minimum du même type que ceux de Gurtin.

Les deux techniques ainsi présentées [Gurtin, 1963<sub>a</sub>], [Sewell, 1987] sont similaires. La seconde a l'avantage de montrer l'origine de l'obtention de la fonctionnelle, ce qui n'est pas le cas de l'approche de Gurtin. De plus, elle peut être généralisée au cas hyperélastique du fait de l'introduction de la densité d'énergie de déformation.

## 1.5 Autres formes d'équations de champs

### ◇ Séparation espace/temps

D'autres formes de principes de minimum ont été établies, sans avoir recours à la transformée de Laplace-Carson. C'est le cas de Christensen [Christensen, 1968] mais il est plus restrictif dans la mesure où il suppose une séparation des variables temps et espace. En effet, il se donne comme fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & 2 \int_{\Omega} \int_0^t \left\{ -\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \tau} + \sigma_{ij} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_{i,j}}{\partial \tau} + \epsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial \tau} \right) - \mathbf{f}_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \phi \right) \right\} d\tau dx \\ & - 2 \int_{\partial\Omega_{u_i}} \int_0^t \sigma_i \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \tau} - \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_i}{\partial \tau} \right) d\tau da - 2 \int_{\partial\Omega_{\sigma_i}} \int_0^t \hat{\sigma}_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \tau} d\tau da \end{aligned}$$

où  $\omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} u_{k,j}$  est la rotation et  $\epsilon_{ijk}$  le symbole de permutation. Pour les processus isothermes,  $\psi$  et  $\phi$  ont les formes suivantes:

$$\begin{cases} \psi = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \mathbb{R}_{ijkl} (2t - \tau - \eta) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \tau}(\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \eta}(\eta) d\tau d\eta \\ \phi = -\frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{R}_{ijkl} (2t - \tau - \eta) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \tau}(\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \eta}(\eta) d\tau d\eta \end{cases}$$

On remarque que  $\psi$  est homogène à une énergie élastique alors que  $\phi$  est homogène à un pseudo-potentiel de dissipation.

Christensen montre que  $\mathcal{L}$  est minimale pour tous les champs admissibles admettant la séparation des variables espace et temps si et seulement si les équations de champs, les conditions aux limites et les conditions initiales sont vérifiées. Les variables doivent donc avoir la forme suivante:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i, t) = \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}(t) & \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}_i, t) = \tilde{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}_i) \varepsilon(t) \\ \omega_k(\mathbf{x}_i, t) = \tilde{\omega}_k(\mathbf{x}_i) \omega(t) & \sigma_{ij}(\mathbf{x}_i, t) = \tilde{\sigma}_i(\mathbf{x}_i) \sigma(t) \end{cases}$$

### ◇ Viscoélasticité dynamique

D'autres [Leitman, 1966], [Reddy, 1976] ont étendu cette théorie à la théorie dynamique de la viscoélasticité en remplaçant l'équation d'équilibre en contrainte et la relation contrainte-déformation par:

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t), \quad \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ji}(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty[$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \mathbb{R}_{ijkl}(x, 0) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) + \int_0^\infty \dot{\mathbb{R}}_{ijkl}(x, \tau) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty[$$

$$\mathbf{u}_i = \hat{\mathbf{u}}_i \quad \text{dans } \partial\Omega_{u_i} \times [0, \infty[$$

$$\mathbf{g}_i = \hat{\mathbf{g}}_i \quad \text{dans } \partial\Omega_{\sigma_i} \times [0, \infty[$$

$$\mathbf{u}_i(x, 0) = d_i(x) \quad \text{dans } \bar{\Omega}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_i(x, 0) = \mathbf{v}_i(x) \quad \text{dans } \bar{\Omega}$$

Ce type de problème se ramène facilement au cas élastique par le biais de la transformée de Laplace-Carson. On peut également le résoudre directement en introduisant une fonctionnelle du même type que celle introduite par Gurtin mais en y ajoutant les termes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \int_0^t \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial \tau^2}(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau dx \\ \int_{\Omega} \int_0^t \int_0^\infty \left( \dot{\mathbb{R}}_{ijkl}(\mathbf{x}, s) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t - s) ds \right) \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau dx \\ \int_{\Omega} \left\{ (\dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, \tau) - \mathbf{v}_i(\mathbf{x})) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t - \tau) \right\} \Big|_{\tau=0}^t dx \\ \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}) (\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, \tau) - 2 d_i(\mathbf{x})) \dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t - \tau) \right\} \Big|_{\tau=0}^t dx \end{array} \right.$$

pour tenir compte de la dynamique du problème et des conditions initiales.

## 1.6 Généralisation des principes de minimum en viscoélasticité selon Huet

Huet [Huet, 1992] a établi des théorèmes de minimum en viscoélasticité linéaire qui généralisent ceux de Gurtin [Gurtin, 1963<sub>a</sub>]. Cette théorie est basée

sur un certain nombre d'opérateurs et de concepts que l'on définit dans ce qui suit.

♡ **Définition 1.7** *Pseudo-convolution de deux tenseurs symétriques d'ordre 2,  $\underline{\underline{a}}(t)$  et  $\underline{\underline{b}}(t)$*

$$\text{III.28} \quad 2C_a(\underline{\underline{b}}, t) = \underline{\underline{a}} \square \underline{\underline{b}} = \left( \int_{0^-}^t - \int_t^{2t} \right) \underline{\underline{a}}(2t - u) : d\underline{\underline{b}}(u)$$

L'opérateur  $\left( \int_{0^-}^t - \int_t^{2t} \right)$  correspond à l'identité triangulaire [Brun, 1965] qui est obtenue grâce à la symétrie des tenseurs d'ordre 2 comme l'illustre la figure 1.1.

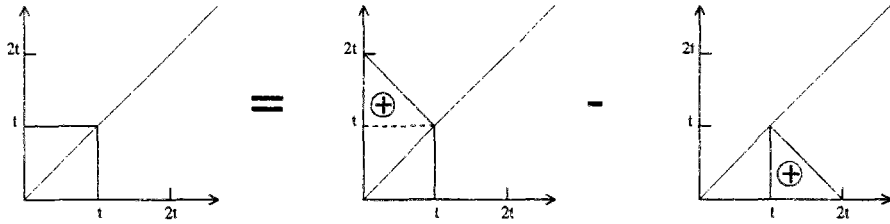


FIG. 1.1 - *Identité triangulaire* [Huet, 1992]

♡ **Définition 1.8** *Pseudo-biconvolution bilinéaire*

$$\begin{aligned} a_g(\underline{\underline{e}}; 2t - u) &= \underline{\underline{g}} \circ \underline{\underline{e}} = \int_{0^-}^{2t-u} \underline{\underline{g}}(2t - u - v) : d\underline{\underline{e}}(v) \\ &\Downarrow \\ 2B_g(\underline{\underline{e}}, \underline{\underline{b}}; t) &= \underline{\underline{g}} \circ \underline{\underline{e}} \square \underline{\underline{b}} = \left( \int_{0^-}^t - \int_t^{2t} \right) \int_{0^-}^{2t-u} \underline{\underline{g}}(2t - u - v) : d\underline{\underline{e}}(v) : d\underline{\underline{b}}(u) \\ \text{III.29} \quad &= \int_{0^-}^t \int_{0^-}^t \underline{\underline{g}}(2t - u - v) : d\underline{\underline{e}}(v) : d\underline{\underline{b}}(u) \\ &\neq \underline{\underline{g}} \circ \underline{\underline{b}} \square \underline{\underline{e}} = 2B_g(\underline{\underline{b}}, \underline{\underline{e}}; t) \end{aligned}$$

♡ **Définition 1.9** *Pseudo-biconvolution quadratique*

$$Q_g(\underline{\underline{b}}; t) = \underline{\underline{g}} \circ \underline{\underline{b}} \square \underline{\underline{b}} = 2B_g(\underline{\underline{b}}, \underline{\underline{b}}; t)$$

III.30

$$Q_g^*(\underline{\underline{a}}) = \int_{\Omega} Q_g(\underline{\underline{a}}) dx$$

♡ **Définition 1.10** *Théorème des travaux virtuels quasistatiques à deux instants différents*

– Histoire de contrainte  $\underline{\tilde{\sigma}}(t)$  statiquement admissible:

$$\text{III.31} \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\tilde{\sigma}}(t_1) + \underline{\mathbf{f}}^d(t_1) &= 0, \quad \forall M \in \Omega, \quad \forall t_1 \in ]-\infty, +\infty[ \\ \underline{\tilde{\sigma}}(t_1) \cdot \underline{\mathbf{n}} &= \underline{\mathbf{g}}^d(t_1), \quad \forall M \in \partial\Omega_{\sigma_i}, \quad \forall t_1 \in ]-\infty, +\infty[ \end{aligned}$$

– Histoire de déformation  $\underline{\tilde{\varepsilon}}(t)$  cinématiquement admissible

$$\text{III.32} \quad \begin{aligned} \underline{\tilde{\varepsilon}}(t_2) &= \left[ \underline{\nabla} \underline{\tilde{\xi}} \right]_s(t_2), \quad \forall M \in \Omega, \quad \forall t_2 \in ]-\infty, +\infty[ \\ \underline{\tilde{\xi}}(t_2) &= \underline{\xi}^d(t_2), \quad \forall M \in \partial\Omega_{u_i}, \quad \forall t_2 \in ]-\infty, +\infty[ \end{aligned}$$

où  $\left[ \underline{\nabla} \underline{\tilde{\xi}} \right]_s$  est la partie symétrique du gradient de  $\underline{\tilde{\xi}}$ .

– Le théorème de la divergence conduit à:

$$\text{III.33} \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\tilde{\sigma}}(t_1) : \underline{\tilde{\varepsilon}}(t_2) \, dx &= \int_{\partial\Omega_{u_i}} \underline{\tilde{\mathbf{g}}}(t_1) \cdot \underline{\tilde{\xi}}(t_2) \, da + \int_{\Omega} \underline{\mathbf{f}}^d(t_1) \cdot \underline{\tilde{\xi}}(t_2) \, dx \\ \underline{\tilde{\mathbf{g}}}(t_1) &= \underline{\tilde{\sigma}}(t_1) \cdot \underline{\mathbf{n}}, \quad \forall M \in \partial\Omega_{\sigma_i} \cup \partial\Omega_{u_i}, \quad \forall t_i \in ]-\infty, +\infty[ \end{aligned}$$

♡ **Définition 1.11** *Théorème des travaux virtuels pseudo-convolutifs*

$$\text{III.34} \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\tilde{\sigma}} \square \underline{\tilde{\varepsilon}} \, dx &= \int_{\partial\Omega_{\sigma_i}} \underline{\mathbf{g}}^d \square \underline{\tilde{\xi}} \, da + \int_{\partial\Omega_{u_i}} \underline{\tilde{\mathbf{g}}} \square \underline{\xi}^d \, da + \int_{\Omega} \underline{\mathbf{f}}^d \square \underline{\tilde{\xi}} \, dx \\ \int_{\Omega} \underline{\tilde{\varepsilon}} \square \underline{\tilde{\sigma}} \, dx &= \int_{\partial\Omega_{\sigma_i}} \underline{\tilde{\xi}} \square \underline{\mathbf{g}}^d \, da + \int_{\partial\Omega_{u_i}} \underline{\xi}^d \square \underline{\tilde{\mathbf{g}}} \, da + \int_{\Omega} \underline{\tilde{\xi}} \square \underline{\mathbf{f}}^d \, dx \end{aligned}$$

♡ **Définition 1.12** *t-symétrisation d'un champs virtuel  $\underline{\tilde{\varepsilon}}$  pour un problème t-symétrisable*

$$\text{III.35} \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbb{R}}} \circ \underline{\tilde{\varepsilon}} \square \underline{\varepsilon} \, dx = \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbb{R}}} \circ \underline{\varepsilon} \square \underline{\tilde{\varepsilon}} \, dx$$

où  $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$  est un tenseur de relaxation.

♡ **Définition 1.13** *Fonctionnelle  $\tilde{H}_{\tilde{\varepsilon}}$  pour le champs virtuel  $\underline{\tilde{\varepsilon}}$  t-symétrique*

$$\text{III.36} \quad \tilde{H}_{\tilde{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbb{R}}} \circ \underline{\tilde{\varepsilon}} \square \underline{\tilde{\varepsilon}} \, dx - \int_{\Omega} \underline{\mathbf{f}}^d \square \underline{\tilde{\xi}} \, dx - \int_{\partial\Omega_{\sigma_i}} \underline{\mathbf{g}}^d \square \underline{\tilde{\xi}} \, da$$



♡ **Définition 1.14** *Variables cinématiques réelles et virtuelles et incréments virtuels*

$$\text{III.37} \quad \tilde{\underline{\underline{\xi}}} = \underline{\underline{\xi}} + \Delta \tilde{\underline{\underline{\xi}}} \quad \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\varepsilon}} + \Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad \Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \left[ \underline{\underline{\nabla}} \left( \Delta \tilde{\underline{\underline{\xi}}} \right) \right]_s$$

♡ **Définition 1.15** *Fonctionnelle  $H_\varepsilon$  pour le champs réel  $\underline{\underline{\varepsilon}}$*

$$\text{III.38} \quad H_\varepsilon = \tilde{H}_\varepsilon \Big|_{\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad \tilde{\underline{\underline{\xi}}} = \underline{\underline{\xi}}; \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbb{R}}} \circ \underline{\underline{\varepsilon}}$$

A partir de toutes ces définitions, on peut évaluer la fonctionnelle  $\tilde{H}_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_\varepsilon &= H_\varepsilon + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbb{R}}} \circ \Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} \square \Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} dx \\ \text{III.39} \quad &+ \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \square \Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} dx - \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{f}}}^d \square \Delta \tilde{\underline{\underline{\xi}}} dx - \int_{\partial\Omega_{\sigma_t}} \underline{\underline{\mathbf{g}}}^d \square \Delta \tilde{\underline{\underline{\xi}}} da \\ &= H_\varepsilon + Q_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}^* (\Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}) + K_\varepsilon \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \square \Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} dx - \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{f}}}^d \square \Delta \tilde{\underline{\underline{\xi}}} dx - \int_{\partial\Omega_{\sigma_t}} \underline{\underline{\mathbf{g}}}^d \square \Delta \tilde{\underline{\underline{\xi}}} da \\ Q_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}^* (\Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbb{R}}} \circ \Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} \square \Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} dx \end{aligned}$$

On peut maintenant énoncer le principe de minimum.

♡ **Principe de minimum 1.1** *De toutes les histoires de déplacements et de déformations virtuelles cinématiquement admissibles et  $t$ -symétriques,  $\tilde{\underline{\underline{\xi}}}$  et  $\tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ , les histoires de champs actuels  $\underline{\underline{\xi}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ , solutions du problème viscoélastique  $t$ -virtuel symétrisable, minimisent la fonctionnelle  $\tilde{H}_\varepsilon(t)$ .*

En effet, le théorème des travaux virtuels pseudo-convolutifs pour  $\Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ ,  $\Delta \tilde{\underline{\underline{\xi}}}$ , les forces et contraintes actuelles conduit à:

$$\text{III.40} \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \square \Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} dx = \int_{\partial\Omega_{\sigma_t}} \underline{\underline{\mathbf{g}}}^d \square \Delta \tilde{\underline{\underline{\xi}}} da + \int_{\partial\Omega_{u_t}} \underline{\underline{\mathbf{g}}} \square \Delta \tilde{\underline{\underline{\xi}}} da + \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{f}}}^d \square \Delta \tilde{\underline{\underline{\xi}}} dx$$

où,  $\tilde{\underline{\underline{\xi}}}$  étant cinématiquement admissible:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\underline{\underline{\xi}}} &= 0 \text{ dans } \partial\Omega_{u_t} \implies K_\varepsilon = 0 \\ &\Downarrow \\ \text{III.41} \quad \tilde{H}_\varepsilon - H_\varepsilon &= Q_{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}^* (\Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbb{R}}} \circ \Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} \square \Delta \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}} dx > 0 \\ &\Downarrow \\ \tilde{H}_\varepsilon(t) &> H_\varepsilon(t) \quad \forall \tilde{\underline{\underline{\xi}}}, \tilde{\underline{\underline{\varepsilon}}}, \quad \forall t \end{aligned}$$

Ce théorème généralise les théorèmes établis par Gurtin [Gurtin, 1963<sub>a</sub>] qui utilise la convolution classique. Il généralise également les théorèmes de minimum de l'élasticité classique plus connus sous le nom de théorème de l'énergie potentielle et de théorème de l'énergie complémentaire.

## 1.7 Discussion

Ces différents théorèmes de stationnarité et de minimum sont, dans leur forme actuelle, difficilement applicables au modèle pseudo-linéaire. En effet, la relation contrainte-déformation n'est pas aussi simple dans le cas des grandes déformations car elle est fortement non linéaire du fait de sa dépendance en fonction du terme  ${}^t\nabla \underline{\mathbf{u}} \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}}$ , dépendance à laquelle s'ajoute la non linéarité des fonctions  $a_0$  et  $a_1$ . D'autre part, l'équation d'équilibre ne s'écrit pas, en lagrangien total,  $\underline{Div} \underline{\Pi} + \rho_0 \underline{\mathbf{f}} = 0$  mais  $\underline{Div} [\underline{\mathbb{F}} \cdot \underline{\Pi}] + \rho_0 \underline{\mathbf{f}} = 0$ .

## Chapitre 2

### Cas de l'hyperélasticité

Dans ce chapitre, on développe une des techniques les plus couramment utilisées pour la résolution des problèmes hyperélastiques.

#### 2.1 Position du problème

Le problème physique consiste en la détermination de la position d'équilibre finale d'une particule d'un matériau hyperélastique occupant un certain domaine dans sa configuration de référence et soumis à une distribution donnée de forces extérieures et de déplacements imposés. On notera  $\underline{\mathbf{f}}$  et  $\underline{\mathbf{g}}$  les densités respectives de forces de volume et de surface dans la configuration de référence (figure 2.1).

#### 2.2 Méthode du lagrangien augmenté

Dans ce paragraphe, on introduit la méthode du lagrangien augmenté [Fortin & Glowinski, 1982], [Glowinski & Le Tallec, 1989] pour la résolution de problèmes en dimension finie. Cette méthode consiste principalement en l'introduction d'une formulation lagrangienne augmentée et de sa formulation duale associée au problème modèle. On donne dans ce paragraphe, sans les démontrer, les principaux résultats (théorèmes de convergence et d'équivalence). On se référera à [Fortin & Glowinski, 1982], [Glowinski & Le Tallec, 1989] pour les démonstrations de ces résultats.

##### 2.2.1 Principe de la méthode

Soit  $\underline{\mathbf{A}}$  une matrice  $N \times N$  symétrique, définie positive et  $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^N$ . On associe à  $\underline{\mathbf{A}}$  et  $\underline{\mathbf{b}}$  la fonctionnelle quadratique  $J: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par:

$$\text{III.42} \quad J(\underline{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{v}}) - (\underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{v}})$$

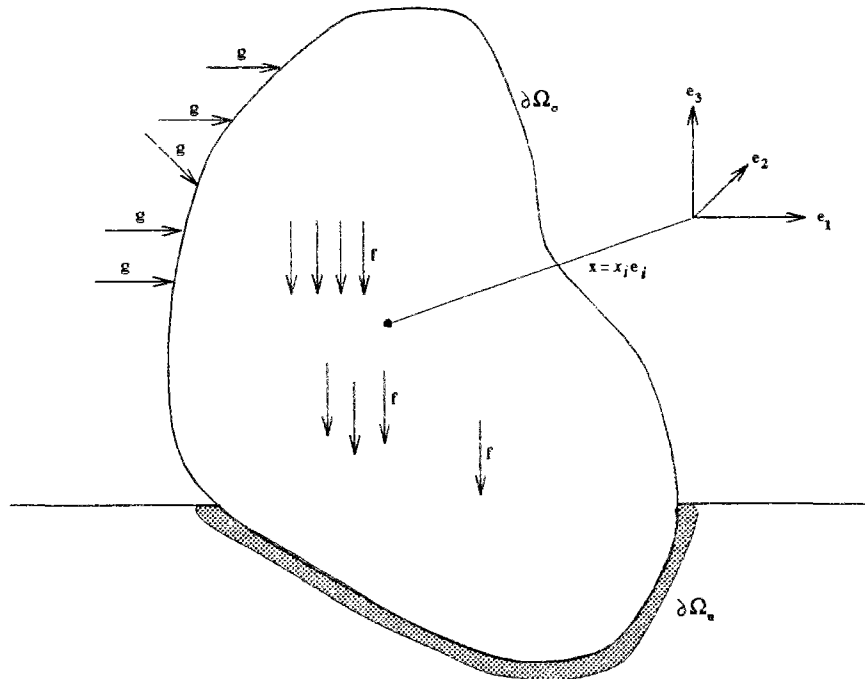


FIG. 2.1 - Matériau dans sa configuration de référence soumis à des forces de volume et de surface

où  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire euclidien canonique de  $\mathbb{R}^N$ . Soit  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^M$ .  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  peut être identifiée à une matrice  $M \times N$ . On introduit également  $\underline{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^M$  tel que

$$\text{III.43} \quad \underline{\mathbf{c}} \in R(\underline{\underline{\mathbf{B}}})$$

avec  $R(\underline{\underline{\mathbf{B}}}) = \{\underline{\mathbf{q}} | \underline{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^M, \exists \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } \underline{\mathbf{q}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\mathbf{v}}\}$ .

On considère le problème de minimisation suivant:

$$\text{III.44} \quad \begin{cases} \text{Trouver } \underline{\mathbf{u}} \in H \text{ tel que} \\ J(\underline{\mathbf{u}}) \leq J(\underline{\mathbf{v}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in H \end{cases}$$

avec

$$\text{III.45} \quad H = \{\underline{\mathbf{v}} | \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N, \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{c}}\}$$

D'après (III.43),  $H \neq \emptyset$ , ce qui signifie que (III.44) admet une solution unique.

### 2.2.2 Formulation lagrangienne augmentée

On introduit un multiplicateur de Lagrange  $\underline{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^M$  qui transforme (III.44) en un problème sans contrainte, soit:

$$\text{III.46} \quad \min_{\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N} \{ J(\underline{\mathbf{v}}) + (\underline{\mathbf{p}}, \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{c}}) \}$$

Le multiplicateur de Lagrange  $\underline{\mathbf{p}}$  apparaît comme une inconnue supplémentaire qui peut être obtenue par la résolution d'un problème de point-selle [Glowinski & Le Tallec, 1989], [Fortin & Glowinski, 1982].

Définissons  $\mathcal{L}: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  par:

$$\text{III.47} \quad \mathcal{L}(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}) = J(\underline{\mathbf{v}}) + (\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{c}})$$

♡ **Définition 2.1**  $\{\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{p}}\}$  est un point-selle de  $\mathcal{L}$  sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  si

$$\text{III.48} \quad \mathcal{L}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{q}}) \leq \mathcal{L}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{p}}) \leq \mathcal{L}(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{p}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N, \quad \forall \underline{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^M$$

La relation (III.48) implique

$$\text{III.49} \quad \min_{\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N} \max_{\underline{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^M} \mathcal{L}(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}) = \max_{\underline{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^M} \min_{\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N} \mathcal{L}(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}) = \mathcal{L}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{p}})$$

Le théorème suivant [Glowinski, 1984] est essentiel pour la suite du développement de la méthode:

♡ **Théorème 2.1** La solution  $\underline{\mathbf{u}}$  de (III.44) est caractérisée par l'existence de  $\underline{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^M$  tel que

$$\text{III.50} \quad \begin{cases} \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{u}} + {}^t \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{b}} \\ \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{c}} \end{cases}$$

Les relations (III.50) caractérisent également tous les points-selles de  $\mathcal{L}$  sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ .

On introduit le lagrangien augmenté  $\mathcal{L}_r$  défini pour  $r > 0$  par [Hestenes, 1969], [Powell, 1969]:

$$\text{III.51} \quad \mathcal{L}_r(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}) = J(\underline{\mathbf{v}}) + (\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{c}}) + \frac{r}{2} |\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{c}}|^2 = \mathcal{L}(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}) + \frac{r}{2} |\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{c}}|^2$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^M$ .

On montre que tout point-selle de  $\mathcal{L}_r$  est un point-selle de  $\mathcal{L}$  et réciproquement du fait que  $r |\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{c}}|^2$  s'annule lorsque la contrainte  $\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{c}}$  est satisfaite.

### 2.2.3 Algorithme de détermination de point-selle

#### ◇ Description de l'algorithme

Il résulte du paragraphe précédent qu'il y a équivalence entre résoudre (III.44) et trouver un point-selle de  $\mathcal{L}_r$  sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ . Un tel point-selle peut être calculé moyennant l'algorithme de type Uzawa suivant [Fortin & Glowinski, 1982], [Glowinski & Le Tallec, 1989]:

<p>(ALG1.1) <math>\underline{\mathbf{p}}^0 \in \mathbb{R}^M</math> arbitrairement donné</p> <p><math>\underline{\mathbf{p}}^n</math> étant connu, on calcule <math>\underline{\mathbf{u}}^n</math> puis <math>\underline{\mathbf{p}}^{n+1}</math> par</p> <p>(ALG1.2) <math display="block">\begin{cases} \mathcal{L}_r(\underline{\mathbf{u}}^n, \underline{\mathbf{p}}^n) \leq \mathcal{L}_r(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{p}}^n) &amp; \forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N \\ \underline{\mathbf{u}}^n \in \mathbb{R}^N \end{cases}</math></p> <p>(ALG1.3) <math display="block">\underline{\mathbf{p}}^{n+1} = \underline{\mathbf{p}}^n + \rho_n (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^n - \underline{\mathbf{c}}), \quad \rho_n &gt; 0</math></p>
--

TAB. 2.1 - *Algorithme 1*

La relation (ALG1.2) est équivalente à:

$$\text{III.52} \quad (\underline{\mathbf{A}} + \rho_n {}^t\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{B}}) \cdot \underline{\mathbf{u}}^n + {}^t\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{p}}^n = \underline{\mathbf{b}} + \rho_n {}^t\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{c}}$$

#### ◇ Résultats de convergence pour $\{\underline{\mathbf{u}}^n\}_{n \geq 0}$

♥ **Théorème 2.2** Pour  $0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq 2r$  et pour tout  $\underline{\mathbf{p}}^0 \in \mathbb{R}^M$ , la suite  $\underline{\mathbf{u}}^n$  définie par l'algorithme 1 converge vers la solution  $\underline{\mathbf{u}}$  de (III.44).

Pour la démonstration de ce théorème, on se référera à [Fortin & Glowinski, 1982] ou [Glowinski & Le Tallec, 1989].

#### ◇ Résultats de convergence pour $\{\underline{\mathbf{p}}^n\}_{n \geq 0}$

En vue d'étudier le comportement de la suite  $\underline{\mathbf{p}}^n$ , notons que:

$$\text{III.53} \quad (R(\underline{\mathbf{B}}))^\perp = \ker({}^t\underline{\mathbf{B}})$$

et, par conséquent

$$\text{III.54} \quad \mathbb{R}^M = R(\underline{\mathbf{B}}) \oplus \ker({}^t\underline{\mathbf{B}})$$

où  $\oplus$  représente la somme directe des deux ensembles  $R(\underline{\underline{\mathbf{B}}})$  et  $\ker({}^t\underline{\underline{\mathbf{B}}})$ , c'est à dire que les deux ensembles sont linéairement indépendants ( $R(\underline{\underline{\mathbf{B}}}) \cap \ker({}^t\underline{\underline{\mathbf{B}}}) = \emptyset$ ). Donc, pour tout  $\underline{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^M$ , on a la décomposition unique:

$$\text{III.55} \quad \underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{q}}_1 + \underline{\mathbf{q}}_2, \quad \underline{\mathbf{q}}_1 \in R(\underline{\underline{\mathbf{B}}}), \quad \underline{\mathbf{q}}_2 \in \ker({}^t\underline{\underline{\mathbf{B}}})$$

En notant  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) le projecteur de  $\mathbb{R}^M$  sur  $R(\underline{\underline{\mathbf{B}}})$  (resp.  $\ker({}^t\underline{\underline{\mathbf{B}}})$ ), on a:

$$\text{III.56} \quad \begin{cases} P_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M) & \forall i = 1, 2 \\ P_i(\underline{\mathbf{q}}) = \underline{\mathbf{q}}_i & \forall \underline{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^M \quad \forall i = 1, 2 \end{cases}$$

Du théorème 2.1, on déduit l'existence d'un unique  $\hat{\mathbf{p}} \in R(\underline{\underline{\mathbf{B}}})$  tel que les multiplicateurs de Lagrange de (III.44), (III.46) soient de la forme:

$$\text{III.57} \quad \underline{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{q}}, \quad \underline{\mathbf{q}} \in \ker({}^t\underline{\underline{\mathbf{B}}})$$

Le vecteur  $\hat{\mathbf{p}}$  apparaît comme un multiplicateur de Lagrange de (III.44), (III.46) de norme minimale dans  $\mathbb{R}^M$ .

Du théorème 2.2 et des propriétés des multiplicateurs de Lagrange, on déduit le théorème suivant:

♡ **Théorème 2.3** *Si  $\rho_n$  vérifie  $0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1 < 2\left(r + \frac{1}{\beta^2}\right)$  alors la suite  $\underline{\mathbf{p}}^n$  définie par l'algorithme 1 converge vers  $\hat{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{p}}_2^0$  où  $\underline{\mathbf{p}}_2^0 = P_2(\underline{\mathbf{p}}^0)$  est la composante de  $\underline{\mathbf{p}}^0$  dans  $\ker({}^t\underline{\underline{\mathbf{B}}})$ . En particulier, si  $\underline{\mathbf{p}}^0 = 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{\mathbf{p}}^n = \hat{\mathbf{p}}$ .*

#### ◇ Interprétation de l'algorithme 1

L'algorithme 1 est en fait un algorithme de type gradient appliqué à la minimisation de la fonctionnelle duale  $J_r^*: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  définie par:

$$\text{III.58} \quad \begin{cases} J_r^* &= - \min_{\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^N} \mathcal{L}_r(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{q}}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} {}^t\underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{q}} \right) - \left( \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot (\underline{\mathbf{b}} + r {}^t\underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\mathbf{c}}), \underline{\mathbf{q}} \right) + (\underline{\mathbf{c}}, \underline{\mathbf{q}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} (\underline{\mathbf{b}} + r {}^t\underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\mathbf{c}}), (\underline{\mathbf{b}} + r {}^t\underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\mathbf{c}}) \right) - \frac{r}{2} |\underline{\mathbf{c}}|^2 \\ \text{où } \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= \underline{\underline{\mathbf{A}}} + r {}^t\underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}} \end{cases}$$

Par élimination de  $\underline{\mathbf{u}}$ , l'algorithme 1 peut s'écrire:

$$(ALG2.1) \quad \underline{\mathbf{p}}^0 \in \mathbb{R}^M \text{ arbitrairement donné}$$

$$(ALG2.2) \quad \underline{\mathbf{p}}^{n+1} = \underline{\mathbf{p}}^n - \rho_n \left( \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1} \cdot {}^t \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{p}}^n - \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1} (\underline{\mathbf{b}} + r {}^t \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{c}}) + \underline{\mathbf{c}} \right)$$

TAB. 2.2 - *Algorithme 2*

## 2.3 Application à l'hyperélasticité en grandes déformations

Pour de tels problèmes, la contrainte en tout point  $\underline{\mathbf{x}}$  du matériau ne dépend que du gradient de transformation  $\underline{\mathbf{F}}$ . Ainsi, en tout point  $\underline{\mathbf{x}}$ , le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff 1  $\underline{\mathbf{K}}$ , dans les cas incompressible et compressible, est donné par la loi constitutive,  $\Psi$  étant le potentiel d'énergie libre:

Incompressible	Compressible
$\begin{cases} \underline{\mathbf{K}} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\mathbf{F}}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{F}}) - p(\underline{\mathbf{x}}) \frac{\partial \det(\underline{\mathbf{F}})}{\partial \underline{\mathbf{F}}} \\ \det(\underline{\mathbf{F}}) = 1 \end{cases}$	$\underline{\mathbf{K}} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\mathbf{F}}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{F}})$

TAB. 2.3 - *Lois de comportement hyperélastiques*

On se place dans la configuration de la figure 2.1. Cette théorie a été développée par Glowinski et Le Tallec [Glowinski & Le Tallec, 1989], [Glowinski & Le Tallec, 1982], [Le Tallec & Vidrascu, 1984]. Nous donnons ici les principaux résultats. Pour plus de détails concernant les démonstrations des différents théorèmes, on se référera à [Glowinski & Le Tallec, 1989], [Glowinski & Le Tallec, 1982], [Le Tallec & Vidrascu, 1984].

### 2.3.1 Formulation faible

L'élimination du tenseur de Piola-Kirchhoff 1 entre le théorème des travaux virtuels et les lois constitutives (TAB. 2.3) et, dans le cas incompressible, la caractérisation de  $p(\underline{\mathbf{x}}) \frac{\partial \det(\underline{\mathbf{F}})}{\partial \underline{\mathbf{F}}}$  comme un élément  $\underline{\mathbf{A}}$  orthogonal à la surface



$Y = \{\mathbf{H} \in \mathbb{R}^9, \det \mathbf{H} = 1\}$ , conduit aux formulations variationnelles des problèmes d'équilibre en hyperélasticité suivantes:

Incompressible	<p>Trouver <math>\underline{\mathbf{u}} \in K</math>, <math>\underline{\mathbf{A}} \in (L^{s^*}(\Omega))^{N \times N}</math> tels que:</p> $\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \left\{ \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}} (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}) + \underline{\mathbf{A}} \right\} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}} \, dx \\ \qquad \qquad \qquad = \int_{\Omega_0} \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dx + \int_{\partial \Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, da \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in V \\ \int_{\Omega_0} \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{G}} \, dx = 0 \quad \forall \underline{\mathbf{G}} \in dY(\underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}) \end{array} \right.$
Compressible	<p>Trouver <math>\underline{\mathbf{u}} \in K</math> tel que:</p> $\int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}} (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}} \, dx = \int_{\Omega_0} \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dx + \int_{\partial \Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, da \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in V$

TAB. 2.4 - Formulations faibles

Afin d'établir dans les cas compressible et incompressible des méthodes de résolution similaire, on développe une formulation variationnelle, dans le cas compressible, similaire à celle du cas incompressible en supposant que le potentiel d'énergie libre dépend en plus de  $\underline{\mathbf{x}}$  et de  $\underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}$ , de  $\underline{\mathbf{M}} = \text{adj}(\underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}})^1$  et  $\mathbf{D} = \det(\underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}})$ . La dépendance vis-à-vis du déterminant du gradient de transformation provient du fait que, dans le cas compressible, celui-ci n'est pas égal à 1. En revanche, dans le cas incompressible, le potentiel d'énergie libre ne dépend pas de l'adjoint du gradient de transformation car celui-ci est lié à la trace de ce même tenseur. Il intervient néanmoins dans la formulation variationnelle à travers la condition d'incompressibilité puisque  $\frac{\partial \det(\underline{\mathbf{F}})}{\partial \underline{\mathbf{F}}} = {}^t(\text{adj}(\underline{\mathbf{F}}))$ . On obtient alors les formulations finales suivantes:

1.  $\text{adj}(\cdot)$  est l'adjoint de l'argument, c'est à dire la transposée de la matrice des cofacteurs.

Cas incompressible
<p>Trouver <math>\underline{\mathbf{u}} \in K</math>, <math>\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in (L^{s^*}(\Omega))^{N \times N}</math> tels que:</p> $\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \left\{ \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}} (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}) + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right\} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{v}} \, dx \\ \qquad \qquad \qquad = \int_{\Omega_0} \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dx + \int_{\partial \Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, da \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in V \\ \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}} \, dx = 0 \quad \forall \underline{\underline{\mathbf{G}}} \in dY(\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}) \end{array} \right.$
Cas compressible
<p>Trouver <math>\underline{\mathbf{u}} \in K</math>, <math>\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in (L^{s^*}(\Omega))^{N \times N}</math> tels que:</p> $\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \left\{ \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}} (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}, \underline{\underline{\mathbf{M}}}, \underline{\underline{\mathbf{D}}}) + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right\} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{v}} \, dx \\ \qquad \qquad \qquad = \int_{\Omega_0} \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dx + \int_{\partial \Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, da \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in V \\ \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}} \, dx = \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbf{M}}}} (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}, \underline{\underline{\mathbf{M}}}, \underline{\underline{\mathbf{D}}}) \times \frac{\partial \text{adj}(\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}})}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}} \, dx \\ + \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbf{D}}}} (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}, \underline{\underline{\mathbf{M}}}, \underline{\underline{\mathbf{D}}}) \times \frac{\partial \det(\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}})}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}} \, dx \quad \forall \underline{\underline{\mathbf{G}}} \in (L^s(\Omega))^{N \times N} \end{array} \right.$

TAB. 2.5 - Formulations faibles finales

$V$ ,  $K$ ,  $Y$  et  $dY(\cdot)$  sont respectivement définis par<sup>2</sup>:

Incompressible	$V = \{\underline{\mathbf{v}} \in W^{1,s}(\Omega), \quad \underline{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_u\} \quad ss^* = s + s^*$ $K = \{\underline{\mathbf{v}} \in W^{1,s}(\Omega), \quad \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{u}}_1 \text{ sur } \partial\Omega_u, \det(\underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}) = 1 \text{ sur } \Omega_0\}$ $Y = \{\underline{\mathbb{F}} \in (L^s(\Omega))^{N \times N}, \det(\underline{\mathbb{F}}) = 1 \text{ p.p. dans } \Omega_0\}$ $dY(\underline{\mathbb{F}}) = \left\{ \underline{\mathbb{G}} \in (L^s(\Omega))^{N \times N}, \frac{\partial \det(\underline{\mathbb{F}})}{\partial \underline{\mathbb{F}}} \cdot \underline{\mathbb{G}} = 0 \text{ p.p. dans } \Omega_0 \right\}$
Compressible	$V = \{\underline{\mathbf{v}} \in W^{1,s}(\Omega), \quad \underline{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial\Omega_u\}$ $K = \{\underline{\mathbf{v}} \in W^{1,s}(\Omega), \quad \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{u}}_1 \text{ sur } \partial\Omega_u, \det(\underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}) > 0 \text{ dans } \Omega_0\}$ $Y = \{\underline{\mathbb{F}} \in (L^s(\Omega))^{N \times N}, \det(\underline{\mathbb{F}}) > 0 \text{ p.p. dans } \Omega_0\}$ $dY(\underline{\mathbb{F}}) = (L^s(\Omega))^{N \times N}$

TAB. 2.6 - Définition des espaces de résolution

### 2.3.2 Formulation lagrangienne augmentée

Chaque problème (TAB. 2.5) correspond au problème de minimisation de l'énergie potentielle totale  $J(\cdot)$  dans l'ensemble  $K$  des champs cinématiquement admissibles:

$$\text{III.59} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{\mathbf{u}} \in K \text{ tel que } J(\underline{\mathbf{u}}) \leq J(\underline{\mathbf{v}}) \\ J(\underline{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \Psi(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}, \cdot, \cdot) \, dx - \int_{\Omega_0} \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dx - \int_{\partial\Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, da \end{array} \right.$$

Dans le cas compressible, les deux derniers arguments du potentiel d'énergie libre sont respectivement  $\text{adj}(\underline{\mathbb{F}})$  et  $\det(\underline{\mathbb{F}})$ . Dans le cas incompressible, le potentiel d'énergie libre ne dépend pas de ces deux derniers arguments.

2. On utilise les notations et la théorie des espaces de Sobolev. On se référera, par exemple, à [Adams, 1975], [Dautray & Lions, 1990] pour une étude des propriétés fondamentales de ces espaces.

On introduit le lagrangien augmenté du type (III.51) sous la forme:

$$\text{III.60} \quad \mathcal{L}_r(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{F}}, \underline{\lambda}) = \int_{\Omega_0} \left\{ \rho_0 \Psi(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}, \cdot, \cdot) + \frac{r}{2} |\underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{F}}|^2 - \underline{\lambda} : (\underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{F}}) \right\} dx$$

où  $r$  est une constante strictement positive arbitraire.

Le problème considéré s'écrit alors:

Trouver  $\{\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{F}}, \underline{\lambda}\} \in V \times Y \times (L^{s^*}(\Omega))^{N \times N}$  tel que:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \partial_{\mathbf{v}} \mathcal{L}_r(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{F}}, \underline{\lambda}) \cdot \underline{\mathbf{v}} = \int_{\Omega_0} \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} dx + \int_{\partial\Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}} da & \forall \underline{\mathbf{v}} \in V \\ \partial_{\mathbf{G}} \mathcal{L}_r(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{F}}, \underline{\lambda}) : \underline{\mathbf{G}} = 0 & \forall \underline{\mathbf{G}} \in dY(\underline{\mathbf{F}}) \\ \partial_{\underline{\mu}} \mathcal{L}_r(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{F}}, \underline{\lambda}) : \underline{\mu} = 0 & \forall \underline{\mu} \in (L^{s^*}(\Omega))^{N \times N} \end{cases}$$

TAB. 2.7 - Problème variationnel à résoudre

Les formes explicites des termes de gauche du problème  $(\mathcal{P})$  sont données par:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{v}} \mathcal{L}_r(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{F}}, \underline{\lambda}) \cdot \underline{\mathbf{v}} &= \int_{\Omega_0} \left\{ \rho_0 \frac{\partial \Psi(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}, \cdot, \cdot)}{\partial \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}} + r(\underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{F}}) - \underline{\lambda} \right\} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}} dx \\ \text{III.61} \quad \partial_{\mathbf{G}} \mathcal{L}_r(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{F}}, \underline{\lambda}) : \underline{\mathbf{G}} &= \int_{\Omega_0} \{ r(\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{1}} - \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}) + \underline{\lambda} \} : \underline{\mathbf{G}} dx \\ \partial_{\underline{\mu}} \mathcal{L}_r(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{F}}, \underline{\lambda}) : \underline{\mu} &= \int_{\Omega_0} \underline{\mu} : (\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{1}} - \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}) dx \end{aligned}$$

On montre le théorème d'équivalence suivant [Glowinski & Le Tallec, 1989], [Glowinski & Le Tallec, 1982], [Le Tallec & Vidrascu, 1984]:

♥ **Théorème 2.4** Les problèmes variationnels (TAB. 2.5) et  $(\mathcal{P})$  sont équivalents avec:

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{1}} + \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{A}} = -\underline{\lambda}$$

De façon générale, ces problèmes sont résolus *via* des algorithmes de type Uzawa (Algorithme 1 - TAB. 2.1, Algorithme 2 - TAB. 2.2) dont la philosophie consiste à réduire la résolution numérique des équations d'équilibre à la résolution successive de problèmes en déplacements et de problèmes en déformations comme le montre l'algorithme suivant:

$$\begin{array}{l}
 \underline{\lambda}^0, \underline{\mathbf{u}}^{-1} \text{ donnés} \in (L^{s^*}(\Omega))^{N \times N} \times V \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Pour } n \geq 0, \underline{\lambda}^n, \underline{\mathbf{u}}^{n-1} \text{ étant connus, on calcule } \underline{\lambda}^{n+1}, \underline{\mathbf{u}}^n \\
 \text{en faisant la suite d'opérations (relaxation par blocs):} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Poser } \underline{\mathbf{u}}_0^n = \underline{\mathbf{u}}^{n-1} \\
 \text{Pour } k \geq 0, \underline{\mathbf{u}}_k^n \text{ étant connu, } \underline{\mathbb{F}}_{k+1}^n \text{ et } \underline{\mathbf{u}}_{k+1}^n \text{ sont calculés} \\
 \text{en résolvant successivement:} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \underline{\mathbb{F}}} \left( \underline{\mathbf{u}}_k^n, \underline{\mathbb{F}}_{k+1}^n, \underline{\lambda}^n \right) : \underline{\mathbb{G}} = 0 \quad \forall \underline{\mathbb{G}} \in dY(\underline{\mathbb{F}}), \underline{\mathbb{F}}_{k+1}^n \in Y \\
 \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \left( \underline{\mathbf{u}}_{k+1}^n, \underline{\mathbb{F}}_{k+1}^n, \underline{\lambda}^n \right) \cdot \underline{\mathbf{v}} = \int_{\Omega_0} \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dx + \int_{\partial\Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, da \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in V, \underline{\mathbf{u}}_{k+1}^n \in V
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \\
 \underline{\lambda}^n \text{ est actualisé par:} \\
 \underline{\lambda}^{n+1} = \underline{\lambda}^n - r \left( \underline{\mathbf{1}} - \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}^n - \underline{\mathbb{F}}^n \right)
 \end{array}
 \right.
 \end{array}$$

TAB. 2.8 - *Algorithme 3*

## 2.4 Discussion

Cette méthode peut également être difficilement applicable au modèle pseudo-linéaire, d'abord en raison de l'écriture du problème en terme de contrainte de Piola-Kirchhoff 1  $\underline{\mathbb{K}}$  et en gradient de transformation  $\underline{\mathbb{F}}$ . En revanche, si on choisit, pour le modèle pseudo-linéaire, comme mesure linéarisante la mesure de déformation de Green-Lagrange, on pourra alors résoudre le problème pseudo-linéaire en résolvant à chaque instant un problème hyperélastique par la technique du

lagrangien augmenté. Dans un souci de généralité de façon à garder la forme générale de  $\underline{\underline{E}}$ , on essaiera d'appliquer la transformée multiple de Laplace-Carson au problème pseudo-linéaire de manière à se ramener à un problème hyperélastique dans l'espace transformé que l'on sait résoudre par le lagrangien augmenté. Cette étude fait l'objet du paragraphe suivant.

## 2.5 Application au modèle pseudo-linéaire

Suite à l'étude des cas viscoélastique linéaire et hyperélastique et à l'impossibilité de les appliquer tels quels au modèle pseudo-linéaire, on peut se demander si l'application de la transformée de Laplace-Carson aux équations de comportement du modèle pseudo-linéaire nous permettrait de nous ramener au cas hyperélastique dont les techniques de résolution existent et ont prouvé leur efficacité, comme la méthode du lagrangien augmenté étudiée dans le paragraphe précédent. Cependant, comme notre approche est de type fonctionnelle, nous adopterons une technique similaire à celle de Christensen en partant du potentiel d'énergie libre. Pour cela, nous devons utiliser la transformée de Laplace-Carson à  $n$  variables introduite par Huet dans de nombreux travaux [Huet, 1972], [Huet, 1974], [Huet, 1985], [Huet, 1992]. Il s'agit de la transformée  $\mathcal{H}_n$  dont nous rappelons ici le principe.

### 2.5.1 Description de la transformée de Laplace-Carson à $n$ variables

La transformation  $\mathcal{H}_n$  à appliquer à un développement d'ordre  $n$  est le produit d'une dissymétrisation  $\mathcal{D}_n$  d'ordre  $n$  par la transformation de Laplace-Carson à  $n$  variables  $\mathcal{C}_n$ :

$$\text{III.62} \quad \mathcal{H}_n \{ \varepsilon(t) \} = \mathcal{C}_n \mathcal{D}_n \{ \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \}$$

– Première transformation: Dissymétrisation  $\mathcal{D}_n$

On considère une intégrale multiple de type:

$$\text{III.63} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_n(t) = \underbrace{\int_{0^-}^t \cdots \int_{0^-}^t}_{n \text{ fois}} \mathbb{J}(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau_1) \cdots \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n$$

Huet [Huet, 1972] définit la dissymétrisation de la façon suivante, pour une intégrale multiple de type (III.63):

$$\mathcal{D}_n \{ \underline{\underline{\varepsilon}}_n(t) \} = \bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_n(t_1, \dots, t_n)$$

III.64

$$= \int_{0^-}^{t_1} \cdots \int_{0^-}^{t_n} \mathbb{J}(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_n) \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau_1) \cdots \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n$$

où on a remplacé  $t$  par le  $t_i$  approprié sur les bornes supérieures des intégrales et dans les arguments des  $\mathbb{J}_{\Xi_n}$ . Suite à des manipulations mathématiques et à une récurrence, on applique au tenseur

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \sum_{k=1}^n \underline{\underline{\varepsilon}}_k(t)$$

la transformation  $\mathcal{D}_n$  suivante:

$$\text{III.65} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_n(t_1, \dots, t_n) = \mathcal{D}_n \{ \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \} = \sum_{k=1}^n \mathcal{D}_k \{ \underline{\underline{\varepsilon}}_k(t) \}$$

On remarquera que  $\mathcal{D}_n$  est inversible.

– Deuxième transformation: Transformation de Laplace-Carson à  $n$  variables  $\mathcal{C}_n$

Par extension de la transformation de Laplace-Carson à une variable, on peut définir la transformée de Laplace-Carson à  $n$  variables par [Poli & Delerue, 1954]:

$$\text{III.66} \quad \mathcal{C}_n \{ f \} = p_1 \cdots p_n \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n \text{ fois}} e^{-(p_1 \tau_1 + \cdots + p_n \tau_n)} f(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n$$

En utilisant les propriétés de cette transformation [Huet, 1972], et en notant  $\underline{\underline{\varepsilon}}_k^{n*}(p_1 \cdots p_k)$  la transformée de  $\underline{\underline{\varepsilon}}_k^n(t_1 \cdots t_k)$  par  $\mathcal{C}_k$ , et  $\underline{\underline{\sigma}}^*(p_i) = \underline{\underline{\sigma}}_i^*$  celle de  $\underline{\underline{\sigma}}(t_i)$  par  $\mathcal{C}_k$ , on obtient:

$$\text{III.67} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_k^{n*}(p_1 \cdots p_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{J}_{\Xi_k}^{k*}(p_1 \cdots p_k) \underline{\underline{\sigma}}^*(p_1) \cdots \underline{\underline{\sigma}}^*(p_k)$$

– Résultat final

La transformée  $\mathcal{H}_n$  de  $\underline{\underline{\varepsilon}}(t)$  est donc:

$$\text{III.68} \quad \underline{\underline{\hat{\varepsilon}}} = \mathcal{H}_n \{ \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \} = \mathcal{C}_n \mathcal{D}_n \{ \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \} = \mathbb{J}_{\Xi_1}^{1*} \underline{\underline{\sigma}}_1^* + \mathbb{J}_{\Xi_2}^{2*} \underline{\underline{\sigma}}_1^* \underline{\underline{\sigma}}_2^* + \cdots + \mathbb{J}_{\Xi_n}^{n*} \underline{\underline{\sigma}}_1^* \underline{\underline{\sigma}}_2^* \cdots \underline{\underline{\sigma}}_n^*$$

Pour la transformée  $\mathcal{H}_n$  de la contrainte, on obtient une relation duale de la précédente en remplaçant les fonctions de fluage  $\mathbb{J}_{\Xi_i}$  par les fonctions de relaxation

$\mathbb{R}_{\Xi_i}$ .

### 2.5.2 Cas du modèle pseudo-linéaire

Partons de l'écriture quadratique du potentiel d'énergie libre (II.4).

$$\rho_0 \Psi(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t - t_1 - t_2) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_2) dt_1 dt_2$$

On peut récrire cette expression en utilisant (II.68) sous forme duale:

$$\rho_0 \Psi(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t - t_1, t - t_2) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_2) dt_1 dt_2$$

Appliquons lui la dissymétrisation  $\mathcal{D}_n$ , avec  $n = 2$ :

$$\text{III.69} \quad \mathcal{D}_2 \{ \rho_0 \bar{\Psi}(t) \} = \rho_0 \Psi(u, v) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^v \int_{-\infty}^u \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(u - t_1, v - t_2) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_2) dt_1 dt_2$$

Appliquons maintenant la transformée de Laplace-Carson à deux variables,  $\mathcal{C}_2$ :

$$\text{III.70} \quad \mathcal{C}_2 \mathcal{D}_2 \{ \rho_0 \Psi(t) \} = \mathcal{C}_2 \{ \rho_0 \Psi(u, v) \} = \rho_0 \Psi^{**}(p_1, p_2) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}^{**}(p_1, p_2) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_2)$$

avec

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_i) &= p_i \int_0^\infty e^{-p_i t_i} \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_i) dt_i, \quad i = 1, 2 \\ \underline{\underline{\mathbb{R}}}^{**}(p_1, p_2) &= p_1 p_2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p_1 t_1 - p_2 t_2} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \end{cases}$$

Exprimons la transformée de Laplace-Carson de  $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$  en fonction de celle de  $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$ . D'après Ditkine et Proudnikov [Ditkine & Proudnikov, 1979], on a:

$$\text{III.71} \quad \underline{\underline{\mathbb{R}}}^{**}(p_1, p_2) = \frac{1}{p_1 - p_2} \left( p_1 \underline{\underline{\mathbb{R}}}^*(p_2) - p_2 \underline{\underline{\mathbb{R}}}^*(p_1) \right)$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned} \text{III.72} \quad \rho_0 \Psi^{**}(p_1, p_2) &= \frac{1}{2} \frac{1}{p_1 - p_2} \left( p_1 \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}^*(p_2) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_2) \right. \\ &\quad \left. - p_2 \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_2) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}^*(p_1) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_1) \right) \end{aligned}$$



Appliquons maintenant la transformée de Laplace-Carson au tenseur des contraintes énergétiquement associé à  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ . Celui-ci s'écrit:

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}}(t) = \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t - t_1) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1) dt_1$$

et sa transformée  $\mathcal{H}_1$ :

$$\text{III.73} \quad \underline{\underline{\mathbb{S}}}^*(p) = \underline{\underline{\mathbb{R}}}^*(p) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p)$$

En combinant les relations (III.72) et (III.73), on obtient:

$$\text{III.74} \quad \rho_0 \Psi^{**}(p_1, p_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{p_1 - p_2} (p_1 \underline{\underline{\mathbb{S}}}^*(p_2) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_1) - p_2 \underline{\underline{\mathbb{S}}}^*(p_1) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_2))$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} 2\rho_0 \Psi^{**}(p_1, p_2) &= \left[ \frac{1}{p_1 - p_2} (p_1 \underline{\underline{\mathbb{S}}}^*(p_2) - p_2 \underline{\underline{\mathbb{S}}}^*(p_1)) \right] : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_1) \\ \text{III.75} \quad &+ \left[ \frac{1}{p_1 - p_2} (p_1 \underline{\underline{\mathbb{S}}}^*(p_2) - p_2 \underline{\underline{\mathbb{S}}}^*(p_1)) \right] : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_2) \\ &- \frac{1}{p_1 - p_2} [p_1 \underline{\underline{\mathbb{S}}}^*(p_2) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_2) - p_2 \underline{\underline{\mathbb{S}}}^*(p_1) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_1)] \end{aligned}$$

Introduisons une «contrainte dissymétrisée»  $\tilde{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}(t_1, t_2)$  définie par:

$$\tilde{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1+t_2} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t_1 + t_2 - u) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(u) du$$

Elle est associée à la contrainte  $\underline{\underline{\mathbb{S}}}(t)$  par la relation:

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}}(t) = \tilde{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right)$$

En notant  $\tilde{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{**}(p_1, p_2)$  la transformée de  $\tilde{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}(t_1, t_2)$  (par analogie avec III.71), on obtient:

$$\begin{aligned} 2\rho_0 \Psi^{**}(p_1, p_2) &= \tilde{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{**}(p_1, p_2) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_1) + \tilde{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{**}(p_1, p_2) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_2) \\ \text{III.76} \quad &- \frac{1}{p_1 - p_2} [p_1 \underline{\underline{\mathbb{S}}}^*(p_2) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_2) - p_2 \underline{\underline{\mathbb{S}}}^*(p_1) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^*(p_1)] \end{aligned}$$

La transformée de Laplace-Carson inverse du terme  $\tilde{\underline{\underline{S}}}^{**}(p_1, p_2) : \underline{\underline{E}}^*(p_1)$  est :

$$\alpha(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \underline{\underline{S}}(t_1 + t_2 - u) : \dot{\underline{\underline{E}}}(u) du$$

De façon similaire, celle de  $\tilde{\underline{\underline{S}}}^{**}(p_1, p_2) : \underline{\underline{E}}^*(p_2)$  vaut :

$$\beta(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} \underline{\underline{S}}(t_1 + t_2 - u) : \dot{\underline{\underline{E}}}(u) du$$

En revanche, celle du troisième terme  $\frac{1}{p_1 - p_2} [p_1 \underline{\underline{S}}^*(p_2) : \underline{\underline{E}}^*(p_2) - p_2 \underline{\underline{S}}^*(p_1) : \underline{\underline{E}}^*(p_1)]$  s'écrit :

$$\gamma(t_1, t_2) = \int_0^{t_1+t_2} \underline{\underline{S}}(t_1 + t_2 - u) : \dot{\underline{\underline{E}}}(u) du$$

Par conséquent, la transformée inverse de  $\rho_0 \Psi^{**}(p_1, p_2)$  s'écrit :

$$\rho_0 \bar{\Psi}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} [\alpha(t_1, t_2) + \beta(t_1, t_2) - \gamma(t_1, t_2)]$$

En posant  $t = t_1 = t_2$  et en utilisant l'égalité triangulaire de Brun, on retrouve la relation classique :

$$\rho_0 \Psi(t) = \frac{1}{2} \left( \int_0^t - \int_t^{2t} \right) \underline{\underline{S}}(2t - u) : \underline{\underline{E}}(u) du = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \underline{\underline{E}}(u) : \underline{\underline{R}}(2t - u - v) : \underline{\underline{E}}(v) du dv$$

En dérivant III.76 successivement par rapport à  $\underline{\underline{E}}^*(p_1)$  et  $\underline{\underline{E}}^*(p_2)$  et en sommant, on trouve :

$$\text{III.77} \quad \tilde{\underline{\underline{S}}}^{**}(p_1, p_2) = 2 \left[ \frac{\partial \rho_0 \Psi^{**}(p_1, p_2)}{\partial \underline{\underline{E}}^*(p_1)} + \frac{\partial \rho_0 \Psi^{**}(p_1, p_2)}{\partial \underline{\underline{E}}^*(p_2)} \right]$$

On constate que l'on se ramène bien, en espace transformé, à une loi de comportement hyperélastique du type (TAB 2.3). Néanmoins, cette méthode présente de nombreux inconvénients tels que la transformation de  $\underline{\underline{E}}(t)$  à travers la relation  $\underline{\underline{E}}(t) = a_0(I_1^\Delta(t), I_2^\Delta(t), I_3^\Delta(t)) \cdot \underline{\underline{1}} + a_1(I_1^\Delta(t), I_2^\Delta(t), I_3^\Delta(t)) \cdot \underline{\underline{\Delta}}(t)$  et l'écriture des conditions aux limites en contrainte. Néanmoins, cette technique peut être utilisée dans le cas où la mesure de déformation linéarisante a une forme simple, en particulier si elle est égale à la déformation de Green-Lagrange. On peut également se demander si l'on ne pourrait pas utiliser la transformée de Laplace-Carson réelle à l'image des travaux de Brilla afin de pouvoir proposer une formulation variationnelle bien adaptée. Mais, dans un même souci de généralité, on abandonnera cette méthode au profit d'une méthode directe dans l'espace temporel. Cela fait l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre 3

# Formulation proposée pour le modèle pseudo-linéaire

### 3.1 Lois de comportement

Le problème à résoudre est celui du calcul des grandes déformations  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  d'un corps viscoélastique compressible (dont le comportement est supposé non linéaire), soumis à une certaine distribution de forces extérieures et de déplacements imposés. Chaque particule du corps est repérée par sa position  $\underline{X}$ , mesurée dans la configuration du corps à l'état libre (en l'absence de contraintes) par rapport à un repère orthonormé fixe de  $\mathbb{R}^N$ . Grâce à ces coordonnées (lagrangiennes), l'intérieur du corps s'identifie à un ouvert  $\Omega_0$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 2$  ou  $3$  suivant le cas (bidimensionnel ou axisymétrique ( $N=2$ ), tridimensionnel ( $N=3$ )). On se place dans la configuration de la figure 2.1, à savoir que le corps est soumis à des forces volumiques d'intensité  $\underline{f}$ , mesurées dans la configuration de référence, et à des forces surfaciques  $\underline{g}$ , mesurées par unité de surface dans la configuration de référence, exercées sur une partie  $\partial\Omega_\sigma$  de la frontière  $\partial\Omega_0$  de  $\Omega_0$ . De plus, un déplacement  $\underline{u}_0$  est imposé sur la partie  $\partial\Omega_u$  de la frontière  $\partial\Omega_0$ , complémentaire de  $\partial\Omega_\sigma$  dans  $\partial\Omega_0$ . Les équations d'équilibre en coordonnées lagrangiennes, lagrangiennes/eulériennes et eulériennes et la donnée d'une loi de comportement de type pseudo-linéaire permettent de caractériser formellement les positions d'équilibre du corps considéré. Les équations d'équilibre dans les différentes configurations sont réunies dans le tableau ci-dessous où  $\underline{n}$  et  $\underline{n}_t$  représentent les normales extérieures à la surface dans la configuration de référence  $\Omega_0$  et dans la configuration actuelle  $\Omega$  respectivement,  $\underline{\underline{\Pi}}$  le tenseur de Piola-Kirchhoff 2 et  $\underline{\underline{\mathbb{K}}}$  le tenseur de Piola-Kirchhoff 1 qui permet d'exprimer les contraintes dans la configuration déformée à partir des vecteurs surfaces élémentaires de la configuration de référence.

	Lagrangien	Lagrangien/eulérien	Eulérien
Loi de comportement pseudo-linéaire	$\underline{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\Delta}}$	$\underline{\mathbb{K}} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\mathbb{F}}}$	$\underline{\sigma} = \rho \underline{\mathbb{F}} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\Delta}} \cdot {}^t \underline{\mathbb{F}}$
Equations d'équilibre	$\begin{cases} \text{Div}(\underline{\mathbb{F}} \cdot \underline{\Pi}) + \rho_0 \underline{\mathbf{f}} = 0 \\ \Pi_{ij} = \Pi_{ji} \\ \Omega_0 \times ] - \infty, \infty[ \end{cases}$	$\begin{cases} \text{Div} \underline{\mathbb{K}} + \rho_0 \underline{\mathbf{f}} = 0 \\ \mathbb{K}_{ij} \neq \mathbb{K}_{ji} \\ \Omega_0 \times ] - \infty, \infty[ \end{cases}$	$\begin{cases} \text{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{\mathbf{f}} = 0 \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ \Omega \times ] - \infty, \infty[ \end{cases}$
C-L en contrainte	$\begin{cases} \underline{\mathbb{F}} \cdot \underline{\Pi} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{g}} \\ \partial \Omega_\sigma \times ] - \infty, \infty[ \end{cases}$	$\begin{cases} \underline{\mathbb{K}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{g}} \\ \partial \Omega_\sigma \times ] - \infty, \infty[ \end{cases}$	$\begin{cases} \underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{n}}_t = \underline{\mathbf{g}} \\ \partial \Omega_{\sigma_t} \times ] - \infty, \infty[ \end{cases}$
C-L en déplacement	$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_0 \text{ sur } \partial \Omega_u$		$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_0 \text{ sur } \partial \Omega_{u_t}$

TAB. 3.1 - *Lois de comportement*

## 3.2 Formulation faible

En éliminant la contrainte de Piola-Kirchhoff 1 entre le théorème des travaux virtuels et la loi constitutive, on obtient le problème variationnel suivant dont la solution est le champs de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}(t)$  à l'équilibre.

$$\text{III.78} \quad \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{\partial \Psi(x(t), \underline{\mathbb{E}}(t))}{\partial \underline{\mathbb{F}}} : \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}} \, dx = \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{\mathbf{f}}(x(t)) \cdot \underline{\mathbf{v}}(x(t)) \, dx$$

$$+ \int_{\partial \Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}}(x(t)) \cdot \underline{\mathbf{v}}(x(t)) \, da \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in U^{1,s} \quad \underline{\mathbf{u}} \in \{U^{1,s} + \underline{\mathbf{u}}_0\}$$

avec  $U^{1,s} = \left\{ \underline{\mathbf{v}} \in (W^{1,s}(\Omega))^N, \underline{\mathbf{v}} = 0 \text{ sur } \partial \Omega_u \right\}$  et  $s$  est tel que les intégrales de la formulation faible soient définies pour  $\underline{\mathbf{u}} \in \{U^{1,s} + \underline{\mathbf{u}}_0\}$  et  $\underline{\mathbf{v}} \in U^{1,s}$ .

## 3.3 Formulation lagrangienne

Le problème précédent correspond au problème de rendre stationnaire l'énergie totale  $J(\cdot)$  dans l'ensemble  $\{U^{1,s} + \underline{\mathbf{u}}_0\}$  des champs cinématiquement admissibles, c'est à dire:

Trouver  $\underline{\mathbf{u}} \in \{U^{1,s} + \underline{\mathbf{u}}_0\}$  tel que  $J(\underline{\mathbf{u}}) \leq J(\underline{\mathbf{v}}) \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in U^{1,s}$

où  $J(\cdot)$  est défini par:

$$J = \Sigma \{\text{Energies}\} = \text{énergie libre} + \text{énergie dissipée}$$

Les différentes énergies qui entrent en jeu dans le bilan sont les suivantes:

1. Energie libre:

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \Psi(t) dx$$

2. Energie dissipée:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(t) &= \int_{\Omega_0} \left( \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{S}}}(t_1) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1) dt_1 - \rho_0 \Psi(t) \right) dx \\ &= \int_{\Omega_0} \left( \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{H}}}(t_1) : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}(t_1) dt_1 - \rho_0 \Psi(t) \right) dx \end{aligned}$$

3. Energie totale:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{F}(t) + \mathcal{D}(t)$$

4. Travail des efforts extérieurs:

$$\mathcal{W}_e(t) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} dx + \int_{\partial\Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{u}} da$$

Rappelons que

$$\rho_0 \Psi(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t - t_1 - t_2) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_2) dt_1 dt_2$$

On sait que  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  est reliée à  $\underline{\underline{\Delta}}$  donc à  $\underline{\mathbf{u}}$  par la contrainte:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbb{E}}} = a_0(\underline{\underline{\Delta}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} + a_1(\underline{\underline{\Delta}}) \cdot \underline{\underline{\Delta}} \\ \underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{\Delta}}(\underline{\mathbf{u}}) \end{cases}$$

Les relations ci-dessus sont vraies à chaque instant. Cette contrainte, fortement non linéaire, peut être traitée par des techniques de décomposition-coordination,

de type lagrangien augmenté, c'est à dire qu'elle est pénalisée et dualisée. On introduit donc le lagrangien:

$$\text{III.79} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}_r(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}, \underline{\lambda}) &= \int_{\Omega_0} \rho_0 \Psi(t) dx + \int_{\Omega_0} \int_0^t \mathcal{P}(t_1) dt_1 dx \\ &+ \int_{\Omega_0} \frac{r}{2} |a_0(\underline{\Delta}) \cdot \underline{\mathbf{1}} + a_1(\underline{\Delta}) \cdot \underline{\Delta} - \underline{\mathbf{E}}|^2 dx \\ &- \int_{\Omega_0} \underline{\lambda} : (a_0(\underline{\Delta}) \cdot \underline{\mathbf{1}} + a_1(\underline{\Delta}) \cdot \underline{\Delta} - \underline{\mathbf{E}}) dx \end{aligned} \right.$$

où  $r$  est une constante strictement positive arbitraire et  $\mathcal{P}$  la puissance dissipée. Le problème est donc le suivant:

Trouver  $\{\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}, \underline{\lambda}\} \in \{U^{1,s} + \underline{\mathbf{u}}_0\} \times \mathcal{T}_{sym} \times (L^{s^*}(\Omega_0))^{N \times N}$  tel que:

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}, \underline{\lambda}) \cdot \underline{\mathbf{v}} &= \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} dx + \int_{\partial \Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}} da \quad \forall \underline{\mathbf{v}} \in \{U^{1,s} + \underline{\mathbf{u}}_0\} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \underline{\mathbf{E}}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}, \underline{\lambda}) : \underline{\mathbf{G}} &= 0 \quad \forall \underline{\mathbf{G}} \in (L^s(\Omega_0))^{N \times N} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \underline{\lambda}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}, \underline{\lambda}) : \underline{\mu} &= 0 \quad \forall \underline{\mu} \in (L^{s^*}(\Omega))^{N \times N} \end{aligned} \right.$$

TAB. 3.2 - Problème variationnel à résoudre

Ci dessus,  $\mathcal{T}_{sym}$  est l'ensemble des tenseurs symétriques.

A partir de la définition de  $\mathcal{L}_r$ , on déduit les formes explicites de ses dérivées en  $\{\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}, \underline{\lambda}\}$ .

$$\text{III.80} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}, \underline{\lambda}) \cdot \underline{\mathbf{v}} &= \int_{\Omega_0} \{r(a_0(\underline{\Delta}) \cdot \underline{\mathbf{1}} + a_1(\underline{\Delta}) \cdot \underline{\Delta} - \underline{\mathbf{E}}) - \underline{\lambda}\} \\ &\cdot \frac{\partial}{\partial \underline{\mathbf{u}}} (a_0(\underline{\Delta}) \cdot \underline{\mathbf{1}} + a_1(\underline{\Delta}) \cdot \underline{\Delta}) \cdot \underline{\mathbf{v}} dx \end{aligned} \right.$$

$$\text{III.81} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \underline{\mathbf{E}}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}, \underline{\lambda}) : \underline{\mathbf{G}} &= \int_{\Omega_0} \left\{ \int_0^t \underline{\mathbb{R}}(t - t_1) : \underline{\dot{\mathbf{E}}}(t_1) dt_1 \right. \\ &- \left. [r(a_0(\underline{\Delta}) \cdot \underline{\mathbf{1}} + a_1(\underline{\Delta}) \cdot \underline{\Delta} - \underline{\mathbf{E}}) - \underline{\lambda}] \right\} : \underline{\mathbf{G}} dx \end{aligned} \right.$$

$$\text{III.82} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \underline{\underline{\lambda}}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}, \underline{\underline{\lambda}}) : \underline{\underline{\mu}} = \int_{\Omega_0} (a_0(\underline{\underline{\Delta}}) \cdot \underline{\mathbf{1}} + a_1(\underline{\underline{\Delta}}) \cdot \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\mathbf{E}}) : \underline{\underline{\mu}} \, dx$$

On a le théorème suivant:

♡ **Théorème 3.1** *Le système lagrangien  $(\mathcal{P})$  est équivalent à la formulation variationnelle (III.78).*

**Démonstration 1** *Supposons que  $\underline{\mathbf{u}}$  soit une solution de (III.78). Si on pose:*

$$\text{III.83} \quad \underline{\mathbf{E}} = a_0(\underline{\underline{\Delta}}) \cdot \underline{\mathbf{1}} + a_1(\underline{\underline{\Delta}}) \cdot \underline{\underline{\Delta}}$$

$$\text{III.84} \quad \underline{\underline{\lambda}} = - \int_0^t \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t - t_1) : \underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}}(t_1) \, dt_1$$

alors  $\underline{\mathbf{E}} \in \mathcal{T}_{\text{sym}}$  du fait de la symétrie de  $\underline{\underline{\Delta}}$ . De plus, les relations (III.81) et (III.82) conduisent à:

$$\text{III.85} \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \underline{\underline{\mathbf{E}}}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}, \underline{\underline{\lambda}}) : \underline{\underline{\mathbf{G}}} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \underline{\underline{\lambda}}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}, \underline{\underline{\lambda}}) : \underline{\underline{\mu}} = 0 \end{cases}$$

D'autre part, la relation (III.80) devient équivalente à:

$$\begin{aligned} \text{III.86} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \underline{\underline{\mathbf{u}}}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}, \underline{\underline{\lambda}}) \cdot \underline{\mathbf{v}} &= \int_{\Omega_0} \int_0^t \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t - t_1) : \underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}}(t_1) \, dt_1 : \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{u}}}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dx \\ &= \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\mathbb{S}}}(t) : \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{u}}}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dx \end{aligned}$$

Sachant que  $\underline{\underline{\mathbb{S}}}$  est un tenseur symétrique égal à  $\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbf{E}}}}$ , on obtient:

$$\text{III.87} \quad \underline{\underline{\mathbb{S}}}(t) : \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{u}}}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbf{E}}}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{v}} = \underline{\underline{\mathbb{K}}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{v}}$$

où  $\underline{\underline{\mathbb{K}}}$  est le tenseur de Piola-Kirchhoff 1.

En utilisant la convention d'Einstein (sommation sur l'indice répété), on obtient:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbb{E}}, \underline{\lambda}) \cdot \underline{\mathbf{v}} &= \int_{\Omega_0} \underline{\mathbb{K}} : \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}} \, dx \\
 &= \int_{\Omega_0} \mathbb{K}_{ij} \mathbf{v}_{i,J} \, dx \\
 \text{III.88} \quad &= \int_{\Omega_0} \left\{ (\mathbb{K}_{ij} \mathbf{v}_i)_{,J} - \mathbb{K}_{ij,J} \mathbf{v}_i \right\} \, dx \\
 &= \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbb{K}_{ij} \mathbf{n}_j \mathbf{v}_i \, da - \int_{\Omega_0} \mathbb{K}_{ij,J} \mathbf{v}_i \, dx \\
 &= \int_{\partial\Omega_\sigma} \underline{\mathbb{K}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, da - \int_{\Omega_0} \underline{\text{Div}} \, \underline{\mathbb{K}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dx
 \end{aligned}$$

Finalement:

$$\text{III.89} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbb{E}}, \underline{\lambda}) \cdot \underline{\mathbf{v}} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dx + \int_{\partial\Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, da$$

Réciproquement, si les relations du système  $(\mathcal{P})$  sont vérifiées, alors on a forcément les relations (III.83) et (III.84) qui sont vérifiées.

### 3.4 Le problème en déplacements

La contrainte

$$\begin{cases} \underline{\mathbb{E}} = a_0(\underline{\Delta}) \cdot \underline{\mathbf{1}} + a_1(\underline{\Delta}) \cdot \underline{\Delta} \\ \underline{\Delta} = \underline{\Delta}(\underline{\mathbf{u}}) \end{cases}$$

est complexe à formuler numériquement et nécessite une résolution de deux problèmes juxtaposés, comme dans le cas de l'hyperélasticité: l'un en déplacements, l'autre en déformations. Dans un souci de simplification numérique, nous résoudrons le problème uniquement en déplacements sans contrainte (c'est dire ni pénalisé, ni dualisé). Pour cela, nous approcherons la relation entre  $\underline{\mathbb{E}}$  et  $\underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}$  au premier ordre.

**Remarque 3.1** Il convient de signaler que si le problème n'est ni dualisé ni pénalisé, le théorème 3.1 d'équivalence reste valable. En effet, considérons la fonctionnelle:



$$\mathcal{L}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \Psi(t) \, dx + \int_{\Omega_0} \int_0^t \mathcal{P}(t_1) \, dt_1 \, dx$$

On montre, comme dans le cas du lagrangien augmenté, que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}) \cdot \underline{\mathbf{v}} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dx + \int_{\partial \Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, da$$

### 3.4.1 Approximations

Compte tenu de ce qui précède, le lagrangien, à l'instant  $t$ , est choisi de la forme:

$$\text{III.90} \quad \mathcal{L}_t(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \Psi(t) \, dx + \int_{\Omega_0} \int_0^t \mathcal{P}(\tau) \, d\tau \, dx$$

A l'instant  $t + \Delta t$ , il s'écrit:

$$\text{III.91} \quad \mathcal{L}_{t+\Delta t}(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{E}}) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \Psi(t + \Delta t) \, dx + \int_{\Omega_0} \int_0^{t+\Delta t} \mathcal{P}(\tau) \, d\tau \, dx$$

#### ◇ Approximations des déformations et des déplacements

Si l'incrément de temps  $\Delta t$  est suffisamment petit, alors on peut supposer que les vitesses de déformation et les vitesses sont constantes par morceaux, c'est à dire que la déformation et le déplacement varient linéairement en fonction du temps. Ceci s'exprime par:

$$\text{III.92} \quad \begin{cases} \underline{\mathbf{E}}(t + \tau) = \underline{\mathbf{E}}(t) + \frac{\tau}{\Delta t} \underline{\mathbf{E}}^* \\ \underline{\mathbf{u}}(t + \tau) = \underline{\mathbf{u}}(t) + \frac{\tau}{\Delta t} \underline{\mathbf{u}}^* \end{cases} \quad \text{avec } \tau \in [0, \Delta t] \quad \text{et } \underline{\mathbf{E}}^* \text{ et } \underline{\mathbf{u}}^* \text{ constants}$$

#### ◇ Approximations de la relation déformation-gradient de déplacement

En supposant l'incrément de temps  $\Delta t$  suffisamment petit, on a:

$$\text{III.93} \quad a_i(t + \Delta t) = a_i(t) + \left. \frac{\partial a_i}{\partial \underline{\mathbf{E}}} \right|_{\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}(t)} : \underline{\mathbf{E}}^* \quad i = 0, 1$$

$$\text{III.94} \quad \underline{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \underline{\mathbf{u}}(t) + \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{E}}} \right|_{\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}(t)} : \underline{\mathbf{E}}^*$$

D'autre part, on a la relation entre  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  et  $\underline{\underline{\Delta}}$  à l'instant  $t + \Delta t$ :

$$\text{III.95} \quad \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t + \Delta t) = \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t) + \underline{\underline{\mathbb{E}}}^* = a_0(t + \Delta t) \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} + a_1(t + \Delta t) \cdot \underline{\underline{\Delta}}(t + \Delta t)$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t + \Delta t) &= \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t) \\ &+ \left( \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \frac{\partial a_0}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}} \Big|_{\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}(t)} + \underline{\underline{\Delta}}(t) \otimes \frac{\partial a_1}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}} \Big|_{\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}(t)} + a_1(t) \frac{\partial \underline{\underline{\Delta}}}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}} \Big|_{\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}(t)} \right) : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^* \\ &+ \frac{\partial a_1}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}} \Big|_{\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}(t)} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^* \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\Delta}}}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}} \Big|_{\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}(t)} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^* \end{aligned}$$

Ainsi, au premier ordre, on a:

$$\text{III.96} \quad \underline{\underline{\mathbb{E}}}^* = \left( \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \frac{\partial a_0}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}} \Big|_{\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}(t)} + \underline{\underline{\Delta}}(t) \otimes \frac{\partial a_1}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}} \Big|_{\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}(t)} + a_1(t) \frac{\partial \underline{\underline{\Delta}}}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}} \Big|_{\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}(t)} \right) : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^*$$

### 3.4.2 Expression de la fonctionnelle $\mathcal{L}$ à l'instant $t + \Delta t$

A partir de l'expression (III.90) de la fonctionnelle  $\mathcal{L}_{\square}$  à l'instant  $t$ , on déduit son expression  $\mathcal{L}_{t+\Delta t}$  à l'instant  $t + \Delta t$  par:

$$\text{III.97} \quad \mathcal{L}_{t+\Delta t}(\underline{\underline{\mathbf{u}}}, \underline{\underline{\mathbb{E}}}) = \int_{\Omega_0} \rho_0 \Psi(t + \Delta t) dx + \int_{\Omega_0} \int_0^{t+\Delta t} \mathcal{P}(\tau) d\tau dx$$

Le premier terme du second membre de la relation (III.97) vaut:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \Psi(t + \Delta t) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \int_0^{t+\Delta t} \int_0^{t+\Delta t} \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_2) dt_1 dt_2 dx$$

En décomposant les intégrales précédentes entre (0 et  $t + \Delta t$ ) par des intégrales entre (0 et  $t$ ) et ( $t$  et  $t + \Delta t$ ), on obtient la forme suivante:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \rho_0 \Psi(t + \Delta t) dx &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \int_0^t \int_0^t \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_2) dt_1 dt_2 dx \\ &+ \int_{\Omega_0} \left\{ \int_0^t \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}}(t_1) : \left( \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) dt_2 \right) dt_1 \right\} : \frac{\underline{\underline{\mathbb{E}}}^*}{\Delta t} dx \\ &+ \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{\underline{\underline{\mathbb{E}}}^*}{\Delta t} : \left( \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \right) : \frac{\underline{\underline{\mathbb{E}}}^*}{\Delta t} \right\} dx \end{aligned}$$

En opérant de la même façon pour la seconde intégrale de (III.97), on obtient:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} \int_0^{t+\Delta t} \mathcal{P}(t_1) dt_1 dx = \int_{\Omega_0} \int_0^t \dot{\mathcal{D}}(\tau) d\tau dx \\
& + \int_{\Omega_0} \int_0^{\Delta t} \int_0^t \int_0^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_2) dt_1 dt_2 d\tau dx \\
& + 2 \int_{\Omega_0} \left\{ \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\tau} \left[ \int_0^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \left( \int_t^{t+\tau} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) dt_2 \right) dt_1 \right] d\tau \right\} : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^* dx \\
& + \int_{\Omega_0} \left\{ \underline{\underline{\mathbb{E}}}^* : \left[ \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\tau^2} \left( \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \right) d\tau \right] : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^* \right\} dx
\end{aligned}$$

Finalement, le lagrangien  $\mathcal{L}_{t+\Delta t}$  s'écrit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{t+\Delta t}(\underline{\underline{\mathbb{E}}}^*, \underline{\underline{\mathbf{u}}}^*) = & \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_2) dt_1 dt_2 - \int_0^t \mathcal{P}(\tau) d\tau \right. \\
& - \left. \int_0^{\Delta t} \int_0^t \int_0^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) : \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_2) dt_1 dt_2 d\tau \right\} dx \\
& + \int_{\Omega_0} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \left( \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) dt_2 \right) dt_1 \right] \right. \\
& - \left. \int_0^{\Delta t} \frac{2}{\tau} \left[ \int_0^t \underline{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \left( \int_t^{t+\tau} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) dt_2 \right) dt_1 \right] d\tau \right\} : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^* dx \\
& + \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\mathbb{E}}}^* : \left\{ \left( \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\Delta t^2} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \right) \right. \\
& - \left. \left[ \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\tau^2} \left( \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \right) d\tau \right] \right\} : \underline{\underline{\mathbb{E}}}^* dx
\end{aligned}$$

Compte tenu de la relation (III.96) exprimant, au premier ordre,  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}^*$  en fonction de  $\underline{\underline{\mathbf{u}}}^*$ , l'expression de  $\mathcal{L}_{t+\Delta t}$  devient une fonctionnelle de  $\underline{\underline{\mathbf{u}}}^*$  uniquement, à savoir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{t+\Delta t}(\underline{\mathbf{u}}^*) &= \alpha \begin{pmatrix} t \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \int_{\Omega_0} \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^t \dot{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \left( \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) dt_2 \right) dt_1 \right] \right. \\
&- \left. \int_0^{\Delta t} \frac{2}{\tau} \left[ \int_0^t \dot{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \left( \int_t^{t+\tau} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) dt_2 \right) dt_1 \right] d\tau \right\} : \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}^* dx \\
&+ \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}^* : \left\{ \left( \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\Delta t^2} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \right) \right. \\
&- \left. \left[ \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\tau^2} \left( \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \right) d\tau \right] \right\} : \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}^* dx
\end{aligned}$$

où  $\alpha \begin{pmatrix} t \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}$  est une fonctionnelle qui dépend de l'histoire des déformations jusqu'à l'instant  $t$

$$\begin{aligned}
\alpha \begin{pmatrix} t \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix} &= \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \dot{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) : \dot{\underline{\mathbb{E}}}(t_2) dt_1 dt_2 - \int_0^t \mathcal{P}(\tau) d\tau \right. \\
&- \left. \int_0^{\Delta t} \int_0^t \int_0^t \dot{\underline{\mathbb{E}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) : \dot{\underline{\mathbb{E}}}(t_2) dt_1 dt_2 d\tau \right\} dx
\end{aligned}$$

et  $\underline{\underline{\beta}}$  est le tenseur d'ordre 4 qui permet de relier  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}^*$  à  $\underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}^*$  au premier ordre

$$\underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \frac{\partial a_0}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}} \bigg|_{\underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}(t)} + \underline{\underline{\Delta}}(t) \otimes \frac{\partial a_1}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}} \bigg|_{\underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}(t)} + a_1(t) \frac{\partial \underline{\underline{\Delta}}}{\partial \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}} \bigg|_{\underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}(t)}$$

De façon plus condensée,  $\mathcal{L}$  s'écrit:

$$\mathcal{L}_{t+\Delta t}(\underline{\mathbf{u}}^*) = \alpha \begin{pmatrix} t \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\mathbf{A}}}(t) : \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}^* dx + \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}^* : \underline{\underline{\mathbf{B}}}(t) : \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}^* dx$$

avec:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{A}}}(t) &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^t \underline{\underline{\mathbf{E}}}(t_1) : \left( \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) dt_2 \right) dt_1 \\ &- \int_0^{\Delta t} \frac{2}{\tau} \left[ \int_0^t \underline{\underline{\mathbf{E}}}(t_1) : \left( \int_t^{t+\tau} \underline{\underline{\mathbf{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) dt_2 \right) dt_1 \right] d\tau\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{B}}}(t) &= \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\Delta t^2} \underline{\underline{\mathbf{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \\ &- \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\tau^2} \left( \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \underline{\underline{\mathbf{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \right) d\tau\end{aligned}$$

◇ Expression de la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}(t)$

On a :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{A}}}(t) &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^t \underline{\underline{\mathbf{E}}}(t_1) : \left( \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) dt_2 \right) dt_1 \\ &- \int_0^{\Delta t} \frac{2}{\tau} \left[ \int_0^t \underline{\underline{\mathbf{E}}}(t_1) : \left( \int_t^{t+\tau} \underline{\underline{\mathbf{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) dt_2 \right) dt_1 \right] d\tau\end{aligned}$$

L'approximation choisie consiste à supposer que, pour un incrément de temps  $\Delta t$  suffisamment petit, la déformation est linéaire en fonction du temps. Ceci implique donc que la vitesse de déformation est constante par morceaux. Par conséquent, l'expression précédente de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}(t)$  peut se calculer en subdivisant l'intervalle  $[0, t]$  en  $n$  intervalles de taille  $\Delta t$ , soit :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{A}}}(t) &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \left\{ \underline{\underline{\mathbf{E}}}(t_1) : \left( \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) dt_2 \right) \right\} dt_1 \\ &- \int_0^{\Delta t} \frac{2}{\tau} \left[ \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \left\{ \underline{\underline{\mathbf{E}}}(t_1) : \left( \int_t^{t+\tau} \underline{\underline{\mathbf{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) dt_2 \right) \right\} dt_1 \right] d\tau\end{aligned}$$

Or,  $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$  étant supposé constant entre  $(k-1)\Delta t$  et  $k\Delta t$  et égal à  $\frac{\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{k-1}^*}{\Delta t}$ , l'expression précédente devient :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{A}}}(t) &= \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{k=1}^n \underline{\underline{\mathbb{E}}}_{k-1}^* : \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) dt_2 dt_1 \\ &\quad - \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^n \underline{\underline{\mathbb{E}}}_{k-1}^* : \int_0^{\Delta t} \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \int_t^{t+\tau} \frac{2}{\tau} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) dt_2 dt_1 d\tau\end{aligned}$$

Si les fonctions de relaxation sont sous forme exponentielle alors, dans le cas isotrope, on a, par exemple:

$$\text{III.98} \quad \underline{\underline{\mathbb{R}}}(t) = \lambda(t) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2 \mu(t) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda(t) = a^\lambda + \sum_{i=1}^{rel} b_i^\lambda e^{-c_i^\lambda t} \\ \mu(t) = a^\mu + \sum_{i=1}^{rel} b_i^\mu e^{-c_i^\mu t} \end{cases}$$

alors le premier terme de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}(t)$  s'écrit:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{k=1}^n \underline{\underline{\mathbb{E}}}_{k-1}^* : \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) dt_2 dt_1 \\ &= \left\{ a^\lambda \sum_{k=1}^n \text{tr}(\underline{\underline{\mathbb{E}}}_{k-1}^*) + \sum_{i=1}^{rel} b_i^\lambda \left( \frac{1 - e^{-c_i^\lambda \Delta t}}{c_i^\lambda \Delta t} \right)^2 e^{-c_i^\lambda (n+1)\Delta t} \sum_{k=1}^n e^{c_i^\lambda k \Delta t} \text{tr}(\underline{\underline{\mathbb{E}}}_{k-1}^*) \right\} \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ &\quad + 2 a^\mu \sum_{k=1}^n \underline{\underline{\mathbb{E}}}_{k-1}^* + 2 \sum_{i=1}^{rel} b_i^\mu \left( \frac{1 - e^{-c_i^\mu \Delta t}}{c_i^\mu \Delta t} \right)^2 e^{-c_i^\mu (n+1)\Delta t} \sum_{k=1}^n e^{c_i^\mu k \Delta t} \underline{\underline{\mathbb{E}}}_{k-1}^*\end{aligned}$$

En revanche, le second a pour expression:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^n \underline{\underline{\mathbb{E}}}_{k-1}^* : \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_t^{t+\tau} \frac{2}{\tau} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) dt_2 d\tau dt_1 \\ &= - \left\{ \sum_{i=1}^{rel} 2 b_i^\lambda \left( \frac{1 - e^{-c_i^\lambda \Delta t}}{\Delta t c_i^\lambda} \right) e^{-c_i^\lambda n \Delta t} \left( \int_0^{\Delta t} \frac{e^{-c_i^\lambda \tau}}{\tau} (1 - e^{-c_i^\lambda \tau}) d\tau \right) \sum_{k=1}^n e^{c_i^\lambda k \Delta t} \text{tr}(\underline{\underline{\mathbb{E}}}_{k-1}^*) \right\} \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{rel} 4 b_i^\mu \left( \frac{1 - e^{-c_i^\mu \Delta t}}{\Delta t c_i^\mu} \right) e^{-c_i^\mu n \Delta t} \left( \int_0^{\Delta t} \frac{e^{-c_i^\mu \tau}}{\tau} (1 - e^{-c_i^\mu \tau}) d\tau \right) \sum_{k=1}^n e^{c_i^\mu k \Delta t} \underline{\underline{\mathbb{E}}}_{k-1}^*\end{aligned}$$

Le terme  $\int_0^{\Delta t} \frac{e^{-c_i^\mu \tau}}{\tau} (1 - e^{-c_i^\mu \tau}) d\tau$  est approché par la méthode des trapèzes, ce qui donne:

$$\int_0^{\Delta t} \frac{e^{-c_i^\mu \tau}}{\tau} (1 - e^{-c_i^\mu \tau}) d\tau = \left\{ \frac{1}{2} \left( c_i^\mu + \frac{e^{-c_i^\mu \Delta t}}{\Delta t} (1 - e^{-c_i^\mu \Delta t}) \right) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{e^{-c_i^\mu \frac{j\Delta t}{m}}}{\frac{j\Delta t}{m}} (1 - e^{-c_i^\mu \frac{j\Delta t}{m}}) \right\} \frac{\Delta t}{m}$$

$m$  étant le nombre de pas de discrétisation de l'intervalle  $[0, \Delta t]$ .

**Remarque 3.2** *Remarque sur  $\underline{\mathbb{E}}_{k-1}^*$*

On a vu précédemment que la déformation était approchée linéairement en fonction du temps. Ainsi, entre  $(k-1)\Delta t$  et  $k\Delta t$ , on a, d'après (III.92):

$$\underline{\mathbb{E}}((k-1)\Delta t + \tau) = \underline{\mathbb{E}}((k-1)\Delta t) + \frac{\tau}{\Delta t} \underline{\mathbb{E}}_{k-1}^*$$

Cela peut s'illustrer par le graphique suivant:

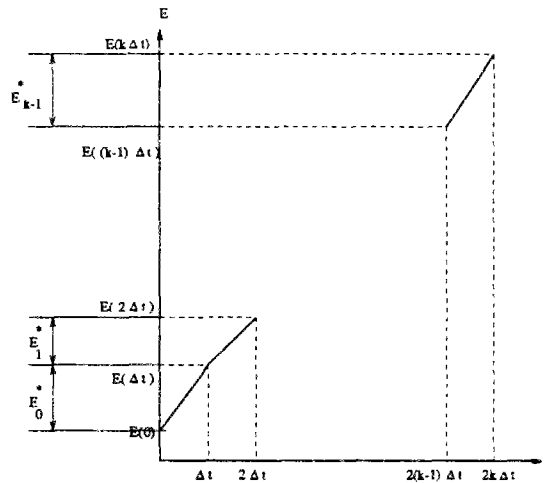


FIG. 3.1 - Approximation linéaire par morceaux de la déformation

En effet, on bien:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbb{E}}}(\tau) &= \underline{\underline{\mathbb{E}}}(0) + \frac{\tau}{\Delta t} \underline{\underline{\mathbb{E}}}_0^* \\
\underline{\underline{\mathbb{E}}}(\Delta t + \tau) &= \underline{\underline{\mathbb{E}}}(\Delta t) + \frac{\tau}{\Delta t} \underline{\underline{\mathbb{E}}}_1^* \\
&\vdots \\
\underline{\underline{\mathbb{E}}}((k-1)\Delta t + \tau) &= \underline{\underline{\mathbb{E}}}((k-1)\Delta t) + \frac{\tau}{\Delta t} \underline{\underline{\mathbb{E}}}_{k-1}^*
\end{aligned}$$

◇ **Expression de la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}(t)$**

On a

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbf{B}}}(t) &= \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\Delta t^2} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \\
&\quad - \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\tau^2} \left( \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \right) d\tau
\end{aligned}$$

Ce terme se calcule, dans le cas isotrope, de façon identique à  $\underline{\underline{A}}(t)$ , excepté que  $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$  n'intervient pas. Ainsi:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{\Delta t^2} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\Delta t - t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \\
&= \frac{1}{2} \left\{ a^\lambda + \sum_{i=1}^{rel} b_i^\lambda \left( \frac{1 - e^{-c_i^\lambda \Delta t}}{c_i^\lambda \Delta t} \right)^2 \right\} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \left\{ a^\mu + \sum_{i=1}^{rel} b_i^\mu \left( \frac{1 - e^{-c_i^\mu \Delta t}}{c_i^\mu \Delta t} \right)^2 \right\} \underline{\underline{\mathbf{1}}}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\Delta t} \frac{1}{\tau^2} \left( \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t + 2\tau - t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \right) d\tau \\
&= - \left\{ \sum_{i=1}^{rel} \frac{b_i^\lambda}{c_i^\lambda} \int_0^{\Delta t} \left( \frac{1 - e^{-c_i^\lambda \tau}}{\tau} \right)^2 d\tau \right\} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{1}}} - \left\{ \sum_{i=1}^{rel} \frac{b_i^\mu}{c_i^\mu} \int_0^{\Delta t} \left( \frac{1 - e^{-c_i^\mu \tau}}{\tau} \right)^2 d\tau \right\} \underline{\underline{\mathbf{1}}}
\end{aligned}$$

L'intégrale  $\int_0^{\Delta t} \left( \frac{1 - e^{-c_i^\mu \tau}}{\tau} \right)^2 d\tau$  se calcule également par la méthode des trapèzes.



### 3.4.3 Stationnarité de la fonctionnelle

En s'inspirant du théorème 3.1, on a le résultat suivant:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{t+\Delta t}}{\partial \underline{\mathbf{u}}^*}(\underline{\mathbf{u}}^*) \cdot \underline{\mathbf{v}}^* = \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* dx + \int_{\partial\Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* da \quad \forall \underline{\mathbf{v}}^* \in U^{1,s}$$

Ce qui est équivalent à:

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega_0} \left\{ \left( \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}}(t) : \underline{\underline{\beta}} \right) : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}^* \right\} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{v}}^* dx &= \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* dx + \int_{\partial\Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* da \\ \text{III.99} \quad &- \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\mathbf{A}}}(t) : \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{v}}^* dx \\ &\forall \underline{\mathbf{v}}^* \text{ compatible} \end{aligned}$$

## 3.5 Discrétisation par éléments finis

La résolution numérique de l'équation (III.99) nécessite, en premier lieu, la description des ensembles discrets où sont définies les différentes grandeurs discrètes telles que les déplacements, les déformations et les contraintes.

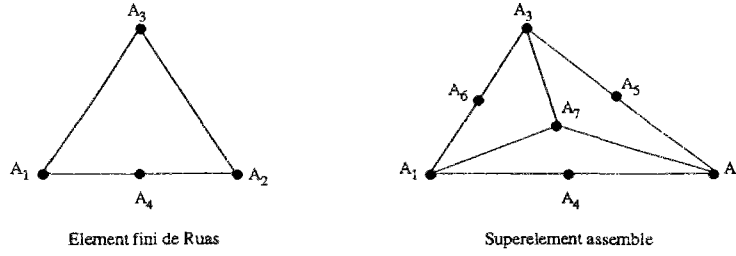
### 3.5.1 Description des ensembles discrets

Afin de définir les ensembles discrets, nous avons utilisé l'élément fini asymétrique introduit par Ruas [Ruas, 1981] et utilisé avec succès par Le Tallec [Le Tallec & Vidrascu, 1984], [Glowinski & Le Tallec, 1989] dans le cas de l'hyperélasticité. Cet élément fini est décrit par (figure 3.2):

- *sa géométrie*: triangle,
- *ses degrés de liberté*: valeurs aux sommets plus valeurs au milieu de  $A_1A_2$ ,
- *ses espaces d'interpolation*: polynôme de degré 2 dont la restriction aux côtés  $A_1A_3$  et  $A_2A_3$  est de degré 1.

L'assemblage de ces éléments 3 par 3 nous permet de générer un superélément fini symétrique comme le montre la figure 3.2.

Nous approchons alors tous les ensembles à l'aide de ces éléments, en interpolant les déplacements à chaque sommet et les gradients et les contraintes aux points de Gauss de chaque élément. Nous supposons donc que le domaine  $\Omega_0$  est un ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^2$ , qui se décompose en superéléments finis. Chaque

FIG. 3.2 - *Elément fini utilisé [Ruas, 1981]*

triangle est noté  $\Omega_k$ . Les composantes des contraintes et des déformations appartiennent à l'ensemble  $P_h$  constitué des fonctions constantes par triangle et défini par:

$$P_h = \{q_h, q_h|_{\Omega_k} = \text{constante}\}$$

Par conséquent, l'ensemble  $Z_h$  réunissant l'ensemble des composantes des contraintes et des déformations s'écrit:

$$Z_h = \{P_h^n, \quad n = 4 \text{ (cas axisymétrique)} \quad \text{ou} \quad n = 9 \text{ (cas tridimensionnel)}\}$$

Chaque triangle  $\Omega_k$  est l'image par une application bilinéaire  $\mathcal{F}_k$  du triangle de référence  $\hat{\Omega} = [(0, 0), (1, 0), (0, 1)]$ .

Ainsi, les déplacements appartiennent à l'ensemble  $X_h$  défini par:

$$X_h = \left\{ \underline{v}_h \in C^0(\bar{\Omega}), \underline{v}_h|_{\Omega_k} = \underline{z}_h \circ \mathcal{F}_k^{-1}, \underline{z}_h \in [Q_1(\hat{\Omega})]^2 \right\}$$

où  $Q_1(\hat{\Omega})$  dénote l'ensemble des polynômes définis sur  $\hat{\Omega}$ , linéaires sur les côtés  $A_1A_3$  et  $A_2A_3$  et quadratiques sur le côté  $A_1A_2$ .

### 3.5.2 Expression du problème discrétisé

Il s'agit de résoudre, à chaque instant  $t$ , le problème de stationnarité suivant:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{t+\Delta t}}{\partial \underline{\mathbf{u}}^*}(\underline{\mathbf{u}}_{k+1}^*) \cdot \underline{\mathbf{v}}^* = \int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* dx + \int_{\partial \Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* da \quad \forall \underline{\mathbf{u}}_{k+1}^* \in \{U^{1,s} + \underline{\mathbf{u}}_0\}, \underline{\mathbf{v}}^* \in U^{1,s}$$

Cela revient à résoudre un problème « classique » par éléments finis. La matrice de rigidité élémentaire provient du double produit contracté  $\underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\mathbf{B}}}(t) : \underline{\underline{\beta}}$  et

le terme de force est la somme  $\int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* dx + \int_{\partial \Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* da + \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\mathbf{A}}}(t) : \underline{\underline{\beta}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{v}}^* dx$ ,

le dernier terme étant la contribution viscoélastique puisqu'il fait intervenir la mémoire du matériau.

**Remarque 3.3** Dans tout ce qui suit, on se restreint au cas axisymétrique. Cette hypothèse permet d'écrire le gradient de la transformation sous une forme particulière avec seulement 5 termes indépendants au lieu de 9 dans le cas tridimensionnel. En outre, le deuxième invariant de  $\underline{\underline{C}}$  est relié au premier et au troisième par une relation simple. En effet, dans ce cas:

$$\text{III.100} \quad I_2^C = I_1^C + I_3^C - 1$$

#### ◇ Expression de la fonction de forme

L'élément fini de Ruas est choisi de telle sorte que l'interpolation sur le côté  $A_1A_2$  soit de degré 2 et celle sur les côtés  $A_1A_3$  et  $A_2A_3$  soit de degré 1. Ceci nous conduit à écrire le déplacement  $\underline{u}$  dans l'élément de référence sous la forme (figure 3.3):

$$\underline{u}(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_x + b_x \cdot \xi + c_x \cdot \eta + d_x \cdot \xi \cdot (\xi + \eta) \\ a_y + b_y \cdot \xi + c_y \cdot \eta + d_y \cdot \xi \cdot (\xi + \eta) \end{Bmatrix}$$

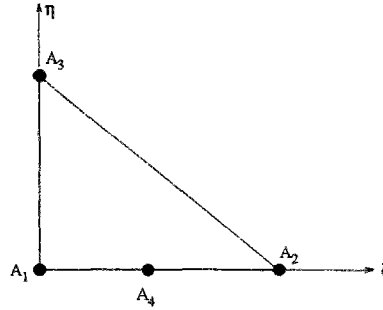


FIG. 3.3 - Élément de référence

On en déduit alors la relation entre les constantes  $a_x, b_x, c_x$  et  $d_x$  (resp.  $a_y, b_y, c_y$  et  $d_y$ ) et les déplacements nœuds horizontaux  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$  (resp. verticaux  $v_1, v_2, v_3$  et  $v_4$ ):

$$\begin{pmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \\ d_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{U}}^e$$

et:

$$\begin{pmatrix} a_y \\ b_y \\ c_y \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{V}}^e$$

où on a noté  $\underline{\mathbf{U}}^e$  et  $\underline{\mathbf{V}}^e$  les vecteurs déplacements nodaux horizontaux et verticaux respectivement. Par conséquent, les déplacements horizontaux  $\mathbf{u}_x$  et verticaux  $\mathbf{u}_y$  sont reliés aux déplacements nodaux  $\underline{\mathbf{U}}^e$  et  $\underline{\mathbf{V}}^e$  par:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_x(\xi, \eta) = \langle 1 & \xi & \eta & \xi \cdot (\xi + \eta) \rangle \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{U}}^e = \langle \underline{N} \rangle \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{U}}^e \\ \mathbf{u}_y(\xi, \eta) = \langle 1 & \xi & \eta & \xi \cdot (\xi + \eta) \rangle \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{V}}^e = \langle \underline{N} \rangle \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{V}}^e \end{cases}$$

$\langle \underline{N} \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi \cdot (\xi + \eta) \rangle$  est appelée fonction de forme.

Notons  $\langle \underline{N}_1 \rangle$  et  $\langle \underline{N}_2 \rangle$  les dérivées de  $\langle \underline{N} \rangle$  par rapport à  $\xi$  et  $\eta$  respectivement.

On a:

$$\begin{cases} \langle \underline{N}_1 \rangle = \langle 0 & 1 & 0 & 2\xi + \eta \rangle \\ \langle \underline{N}_2 \rangle = \langle 0 & 0 & 1 & \xi \rangle \end{cases}$$

Soit  $x$  et  $y$  les coordonnées d'un noeud du triangle. On a alors les relations de passage entre l'élément de référence et le triangle réel du maillage qui s'écrivent:

$$\text{III.101} \quad \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta \end{cases}$$

Soit  $J_{ef}$  le jacobien de cette transformation. On a:

$$\text{III.102} \quad J_{ef} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

### 3.5.3 Discrétisation du terme $\int_{\Omega_0} \left\{ \left( \underline{\underline{\beta}} : \underline{\mathbf{B}}(t) : \underline{\underline{\beta}} \right) : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}^* \right\} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{v}}^* dx$

Posons  $\underline{\underline{\mathcal{K}}} = \underline{\underline{\beta}} : \underline{\mathbf{B}}(t) : \underline{\underline{\beta}}$

De plus, écrivons le tenseur d'ordre 2  $\underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}^*$  sous forme de vecteur colonne, c'est à dire que, dans le cas axisymétrique

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{\mathbf{u}}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{x,x}^* & \mathbf{u}_{x,y}^* & 0 \\ \mathbf{u}_{y,x}^* & \mathbf{u}_{y,y}^* & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathbf{u}_y^*}{y} \end{pmatrix}$$

est remplacé par

$$\underline{\nabla} \mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{x,x}^* \\ \mathbf{u}_{y,y}^* \\ \frac{\mathbf{u}_y^*}{y} \\ \mathbf{u}_{x,y}^* \\ \mathbf{u}_{y,x}^* \end{pmatrix}$$

et soit  $\underline{\underline{\mathcal{K}}}$  le tenseur d'ordre 2 et de dimension  $(5 \times 5)$  tel que:

$$\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u}^* : \underline{\underline{\mathcal{K}}} : \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v}^* = \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u}^* \cdot \underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v}^* \quad \forall \mathbf{u}^*, \forall \mathbf{v}^*$$

Posons:

$$\text{III.103} \quad J_{ef}^{-1} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\det(J_{ef})} \frac{\partial y}{\partial \eta} & a' = -\frac{1}{\det(J_{ef})} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ b = -\frac{1}{\det(J_{ef})} \frac{\partial x}{\partial \eta} & b' = \frac{1}{\det(J_{ef})} \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{cases}$$

Par conséquent:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{x,x}^* \\ \mathbf{u}_{y,y}^* \\ \frac{\mathbf{u}_y^*}{y} \\ \mathbf{u}_{x,y}^* \\ \mathbf{u}_{y,x}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a \langle \underline{N}_1 \rangle + a' \langle \underline{N}_2 \rangle) \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{U}}^e \\ (b \langle \underline{N}_1 \rangle + b' \langle \underline{N}_2 \rangle) \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{V}}^e \\ \frac{\langle \underline{N} \rangle \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{V}}^e}{y} \\ (b \langle \underline{N}_1 \rangle + b' \langle \underline{N}_2 \rangle) \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{U}}^e \\ (a \langle \underline{N}_1 \rangle + a' \langle \underline{N}_2 \rangle) \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{V}}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_3 \\ \kappa_2 & 0 \\ 0 & \kappa_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\underline{U}}^e \\ \underline{\underline{V}}^e \end{pmatrix} = \underline{\underline{\kappa}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\underline{U}}^e \\ \underline{\underline{V}}^e \end{pmatrix}$$

Donc:

$$\int_{\Omega_0} \underline{\underline{\mathcal{K}}} : \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}^* : \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^* dx = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^* dx = \int_{\Omega_0} {}^t \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^* \cdot \underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}^* dx$$

En utilisant l'expression de  $\underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}^*$ , on obtient:

$$\int_{\Omega_0} {}^t \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^* \cdot \underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}^* dx = {}^t \left( \frac{\underline{\mathbf{U}}^e}{\underline{\mathbf{V}}^e} \right) \cdot \sum_{\text{mailles}} \left\{ \int_{E_r} [{}^t \underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{K}}}] dS \right\} \cdot \left( \frac{\underline{\mathbf{U}}^e}{\underline{\mathbf{V}}^e} \right)$$

où  $E_r$  est l'élément de référence.

L'élément de surface  $dS$  vaut, dans le cas axisymétrique:

$$\text{III.104} \quad dS = 2\pi y(\xi, \eta) \cdot 2 S d\eta d\xi$$

où  $S$  est la surface du triangle.

Donc:

$$\text{III.105} \quad \sum_{\text{mailles}} \int_{E_r} {}^t \underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{K}}} dS = \sum_{\text{mailles}} 4\pi S \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t \underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{K}}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{K}}} y(\xi, \eta) d\eta d\xi$$

Rappelons que

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta$$

Il s'agit donc de calculer un certain nombre d'intégrales élémentaires dont les détails sont en annexe D. Ces intégrales sont du type:

$$\text{III.106} \quad I_{ij} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \xi^i \eta^j d\eta d\xi = \frac{i! j!}{(i+j+2)!}$$

### 3.5.4 Discrétisation du terme $\int_{\Omega_0} \left\{ \underline{\underline{\mathbf{A}}}(t) : \underline{\underline{\beta}} : \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^* \right\} dx$

Posons  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}(t) : \underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{\Lambda}}_0$  et soit  $\underline{\underline{\Lambda}}$  le vecteur tel que:

$$\underline{\underline{\Lambda}}_0 : \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^* = \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^* \quad \forall \underline{\mathbf{v}}^*$$

Comme pour le cas précédent, on a:

$$\int_{\Omega_0} \underline{\underline{\Lambda}}_0 : \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^* dx = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^* dx = \int_{\Omega_0} {}^t \underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^* \cdot \underline{\underline{\Lambda}} dx$$

En remplaçant par l'expression de  $\underline{\nabla} \underline{\mathbf{v}}^*$  et en sommant sur toutes les mailles, on obtient:

$$\int_{\Omega_0} {}^t \underline{\nabla} \mathbf{v}^* \cdot \underline{\Lambda} \, dx = {}^t \left( \frac{\underline{\mathbf{U}}^e}{\underline{\mathbf{V}}^e} \right) \cdot \sum_{\text{mailles}} \left\{ \int_{E_r} {}^t \underline{\kappa} \cdot \underline{\Lambda} \, dS \right\}$$

En utilisant la relation (III.104), on obtient:

$$\text{III.107} \quad \sum_{\text{mailles}} \left\{ \int_{E_r} {}^t \underline{\kappa} \cdot \underline{\Lambda} \, dS \right\} = \sum_{\text{mailles}} 4 \pi S \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t \underline{\kappa} \cdot \underline{\Lambda} \, y(\xi, \eta) \, d\eta \, d\xi$$

On se ramène au calcul d'intégrales élémentaires du même type que celles du cas précédent et dont les détails se trouvent en annexe E .

### 3.5.5 Discrétisation du terme $\int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* \, dx$

En exprimant le fait que  $\underline{\mathbf{v}}^* = \langle \underline{\mathbf{N}} \rangle \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \left( \frac{\underline{\mathbf{U}}^e}{\underline{\mathbf{V}}^e} \right)$  et en discrétisant l'intégrale  $\int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* \, dx$  sur l'ensemble des mailles, on obtient, de façon analogue à ce qui précède:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* \, dx = {}^t \left( \frac{\underline{\mathbf{U}}^e}{\underline{\mathbf{V}}^e} \right) \cdot \sum_{\text{mailles}} \int_{E_r} {}^t \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot {}^t \langle \underline{\mathbf{N}} \rangle \cdot \underline{\mathbf{f}} \, dS$$

De même, en utilisant l'expression (III.104), on se ramène à la relation:

$$\sum_{\text{mailles}} \int_{E_r} {}^t \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot {}^t \langle \underline{\mathbf{N}} \rangle \cdot \underline{\mathbf{f}} \, dS = \sum_{\text{mailles}} 4\pi S {}^t \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \left\{ \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t \langle \underline{\mathbf{N}} \rangle \, y(\xi, \eta) \, d\eta \, d\xi \right\} \cdot \underline{\mathbf{f}}$$

### 3.5.6 Discrétisation du terme $\int_{\partial\Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* \, da$

La particularité de ce terme est qu'il doit être discrétisé sur la surface  $\partial\Omega_\sigma$  et non sur toutes les mailles. Ainsi, on peut l'écrire:

$$\int_{\partial\Omega_\sigma} \underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* \, da = \sum_{\text{mailles}} \int_{E_r \cap \partial\Omega_\sigma} {}^t \underline{\mathbf{v}}^* \cdot \underline{\mathbf{g}} \, da$$

Ceci revient donc à intégrer  ${}^t \underline{\mathbf{v}}^* \cdot \underline{\mathbf{g}}$  sur le triangle de référence pour  $\eta = 0$  afin de se placer sur la frontière de l'élément. Donc:

$$\sum_{\text{mailles}} \int_{E_r \cap \partial\Omega_\sigma} {}^t \underline{\mathbf{v}}^* \cdot \underline{\mathbf{g}} \, da = {}^t \left( \frac{\underline{\mathbf{U}}^e}{\underline{\mathbf{V}}^e} \right) \cdot \sum_{\text{mailles}} l_{E_r \cap \partial\Omega_\sigma} {}^t \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \left\{ \int_0^1 {}^t \langle \underline{\mathbf{N}} \rangle|_{\eta=0} \, y(\xi, 0) \, d\xi \right\} \cdot \underline{\mathbf{g}}$$

où  $l_{E_r \cap \partial \Omega_\sigma}$  est la longueur du segment sur lequel est appliquée la contrainte.

Après le calcul de l'intégrale dans l'expression précédente, on obtient finalement:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\text{mailles}} l_{E_r \cap \partial \Omega_\sigma} {}^t \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \left\{ \int_0^1 {}^t \langle \underline{N} \rangle \big|_{\eta=0} y(\xi, 0) d\xi \right\} \cdot \underline{\underline{g}} \\
 &= \sum_{\text{mailles}} \left\{ l_{E_r \cap \partial \Omega_\sigma} {}^t \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot {}^t \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \quad \frac{1}{6}(y_1 + 2y_2) \quad 0 \quad \frac{1}{12}(y_1 + 3y_2) \end{array} \right\rangle \right\} \cdot \underline{\underline{g}} \\
 &= \sum_{\text{mailles}} \left\{ l_{E_r \cap \partial \Omega_\sigma} \left( \begin{array}{c} \frac{y_1}{6} \\ \frac{y_2}{6} \\ 0 \\ \frac{y_1 + y_2}{3} \end{array} \right) \right\} \cdot \underline{\underline{g}}
 \end{aligned}$$

### 3.5.7 Discrétisation du problème global

En rassemblant l'ensemble des discrétisations précédentes, on obtient le problème global discrétisé, correspondant au problème (III.99), suivant:

<p>Trouver <math>(\underline{\mathbf{U}}^e, \underline{\mathbf{V}}^e)</math> tel que</p> $  \begin{aligned}  & 2 \sum_{\text{mailles}} 4\pi S \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t \underline{\underline{\kappa}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\kappa}} y(\xi, \eta) d\eta d\xi \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{U}}^e \\ \underline{\mathbf{V}}^e \end{pmatrix} \\  &= \sum_{\text{mailles}} 4\pi S {}^t \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \left\{ \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t \langle \underline{N} \rangle y(\xi, \eta) d\eta d\xi \right\} \cdot \underline{\underline{f}} \\  &+ \sum_{\text{mailles}} \left\{ l_{E_r \cap \partial \Omega_\sigma} \left( \begin{array}{c} \frac{y_1}{6} \\ \frac{y_2}{6} \\ 0 \\ \frac{y_1 + y_2}{3} \end{array} \right) \right\} \cdot \underline{\underline{g}} \\  &- \sum_{\text{mailles}} 4\pi S \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t \underline{\underline{\kappa}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}} y(\xi, \eta) d\eta d\xi  \end{aligned}  $
--

TAB. 3.3 - Problème discrétisé global



◇ **Interprétation des différents termes**

– Le terme  $4\pi S \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t\kappa \cdot \underline{\underline{\kappa}} \cdot \underline{\kappa} y(\xi, \eta) d\eta d\xi$  correspond à la matrice de rigidité,

–  $4\pi S \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \left\{ \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t\langle \underline{N} \rangle y(\xi, \eta) d\eta d\xi \right\} \cdot \underline{\mathbf{f}}$  correspond au terme de force volumique,

–  $l_{E_r \cap \partial\Omega_\sigma} \begin{pmatrix} \frac{y_1}{6} \\ \frac{y_2}{6} \\ 0 \\ \frac{y_1+y_2}{3} \end{pmatrix} \cdot \underline{\mathbf{g}}$  correspond à la condition aux limites en contraintes,

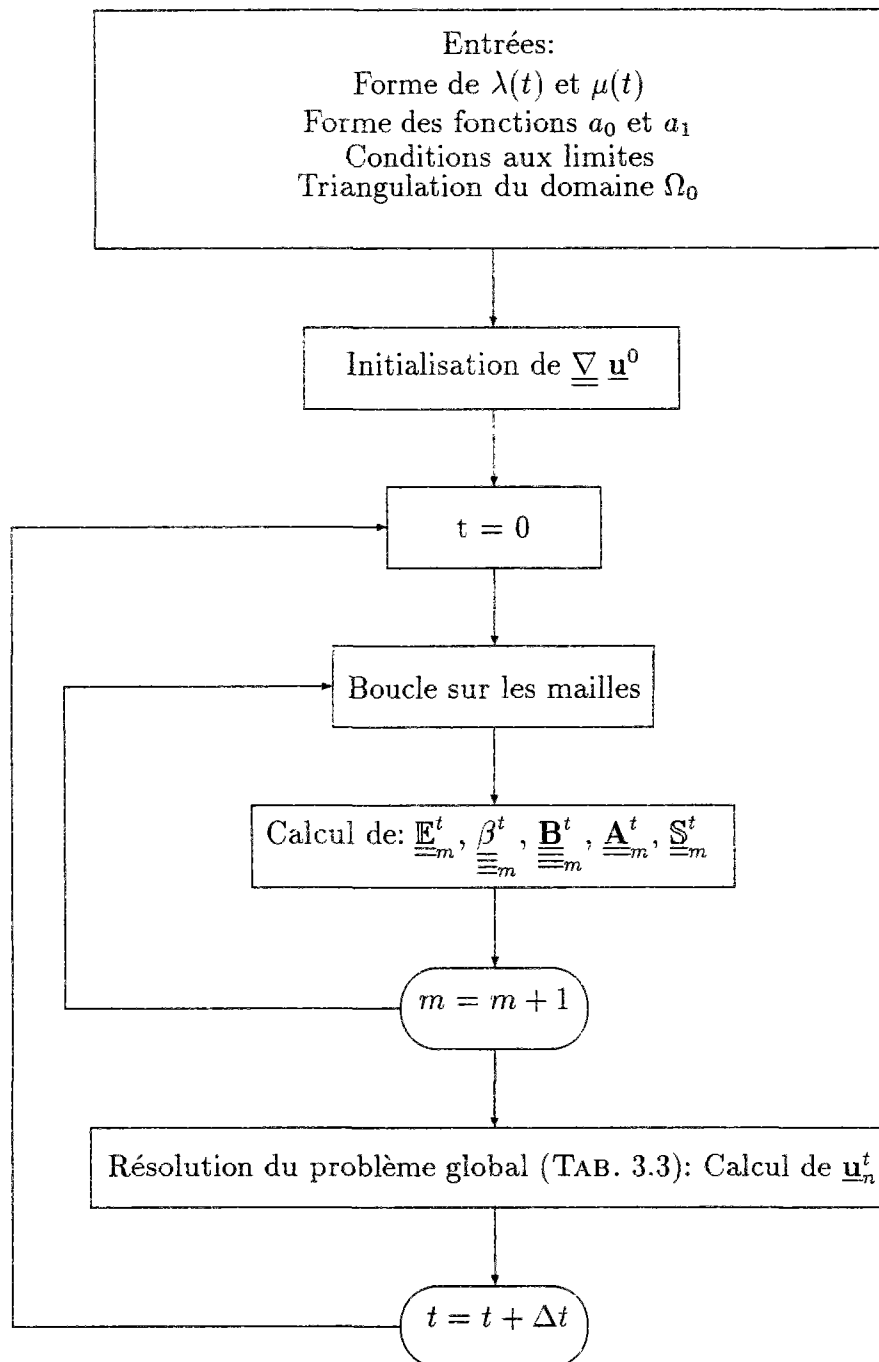
–  $4\pi S \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t\kappa \cdot \underline{\underline{\Lambda}} y(\xi, \eta) d\eta d\xi$  correspond à un terme de force supplémentaire faisant intervenir les caractéristiques du matériau ainsi que sa mémoire.

Ce problème est résolu par la méthode de Cholesky ou de Gauss. Il se ramène bien à un problème du type:

$$\text{III.108} \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{F}}$$

où les termes  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ ,  $\underline{\mathbf{U}}$  et  $\underline{\mathbf{F}}$  s'identifient de façon naturelle à partir de l'expression du problème global TAB.3.3 et correspondent à l'assemblage des matrices élémentaires  $\underline{\underline{\mathcal{R}}}^{el}$  et  $\underline{\underline{\mathcal{F}}}^{el}$  (voir annexes D et E) .

## 3.5.8 Algorithme de résolution



## Chapitre 4

### Exemples d'application

Dans ce chapitre, nous allons effectuer, dans un premier temps, une validation du modèle numérique par des exemples en relaxation en petites déformations et en hyperélasticité en grandes déformations, et, dans un deuxième temps, quelques essais numériques en viscoélasticité non linéaire en grandes déformations. Les simulations en petites déformations vont nous permettre de juger de l'influence du pas de temps alors que les essais en hyperélasticité testeront la finesse du maillage. Une fois ces deux paramètres fixés, nous effectuerons des simulations en viscoélasticité non linéaire en grandes déformations. On se place dans le cas de sollicitations axisymétriques. Toutes les simulations seront faites sur un cylindre dont, pour des raisons évidentes de symétrie, seule une moitié sera représentée. On notera  $L$  sa longueur et  $R$  son rayon. Dans les exemples, sauf indication contraire, la longueur vaut 4 unités et le rayon 1 unité. Pour chacun des exemples, nous mettrons en évidence les conditions aux limites en justifiant leur choix.

Le déplacement imposé, pour les essais de relaxation est de la forme:

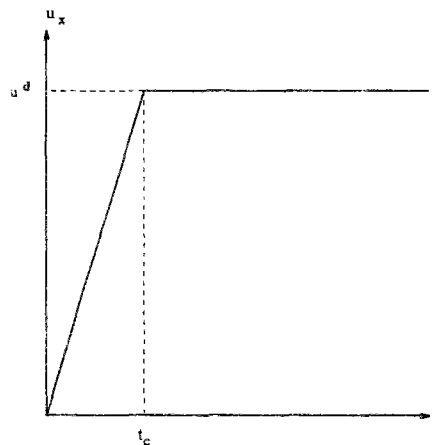


FIG. 4.1 - *Déplacement horizontal imposé sur le bord droit*

Sauf indication contraire, ce sera ce type de chargement que l'on imposera dans les exemples ci-dessous.

## 4.1 Compression HPP

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la compression en petites déformations d'un cylindre. Les conditions de sollicitation sont décrites par la figure 4.2.

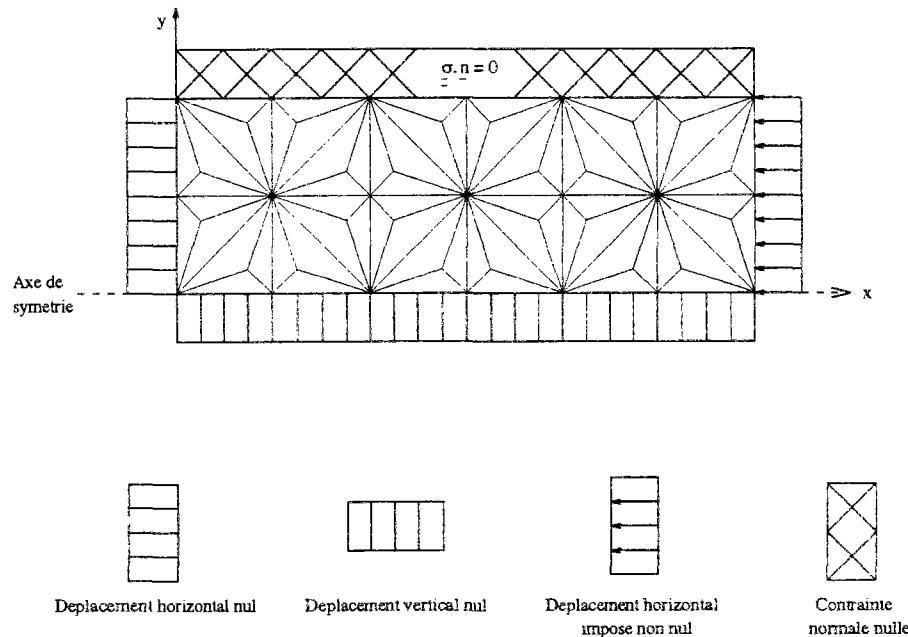


FIG. 4.2 - Conditions de sollicitation d'un cylindre en compression

Le côté gauche du cylindre est fixé en déplacement horizontal pour éviter tout mouvement rigide. Le côté opposé est soumis à un déplacement horizontal non nul. La face supérieure est libre de contrainte alors que l'axe de symétrie est fixé verticalement pour respecter la continuité des déplacements.

### 4.1.1 Solution analytique

La solution analytique de la compression d'un cylindre en viscoélasticité en petites déformations se trouve dans la plupart des cours de Mécanique des Milieux Continus tels que [Salençon, 1988]. C'est pourquoi nous nous contentons de la reproduire sans la démontrer.

Les données ont la forme suivante:

1. forces de masse nulles
2. surface latérale supérieure libre de contrainte

## 3. aux extrémités

- $u_x = 0$  sur la face gauche
- $u_x = u^d$  sur la face droite

Le champ de contrainte uniaxial homogène résultant est de la forme:

$$\begin{cases} \sigma_{11}(t) = \lambda(t) \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) + 2\mu(t) \varepsilon_{11} \\ \sigma_{ij} = 0 \quad \text{si } (i, j) \neq (1, 1) \end{cases}$$

avec

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{u^d}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{pmatrix}$$

$\lambda(t)$  et  $\mu(t)$  sont des fonctions de relaxation:

$$\begin{cases} \lambda(t) = 0.5 + 0.3 e^{-0.2t} + 0.4 e^{-0.02t} + 0.005 e^{-0.002t} \\ \mu(t) = 0.5 + 0.4 e^{-0.2t} + 0.5 e^{-0.02t} + 0.05 e^{-0.002t} \end{cases}$$

## 4.1.2 Solution numérique

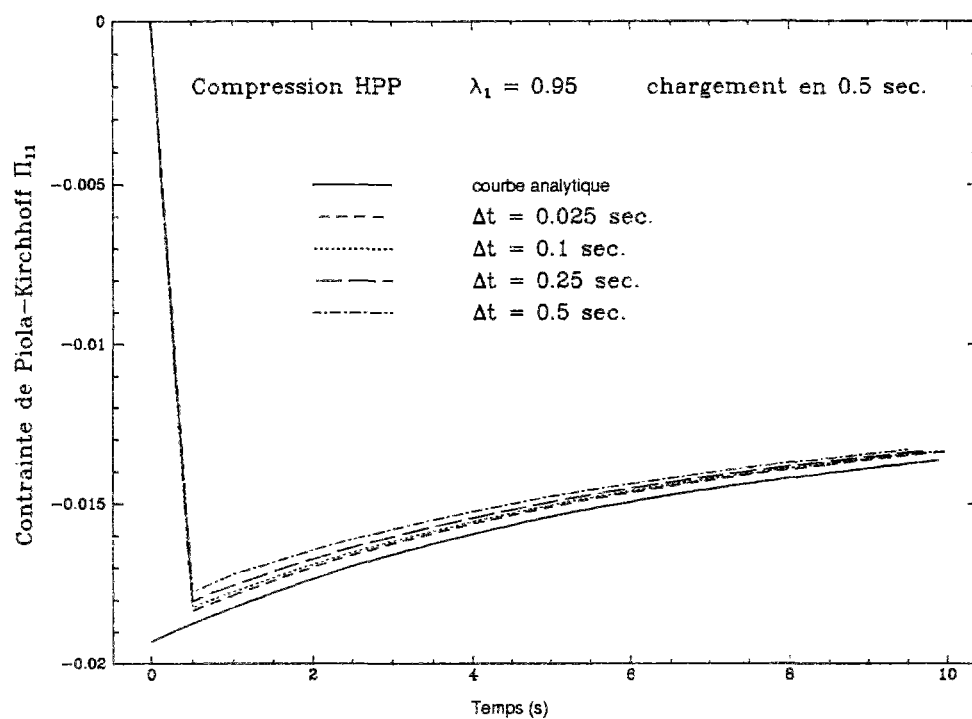
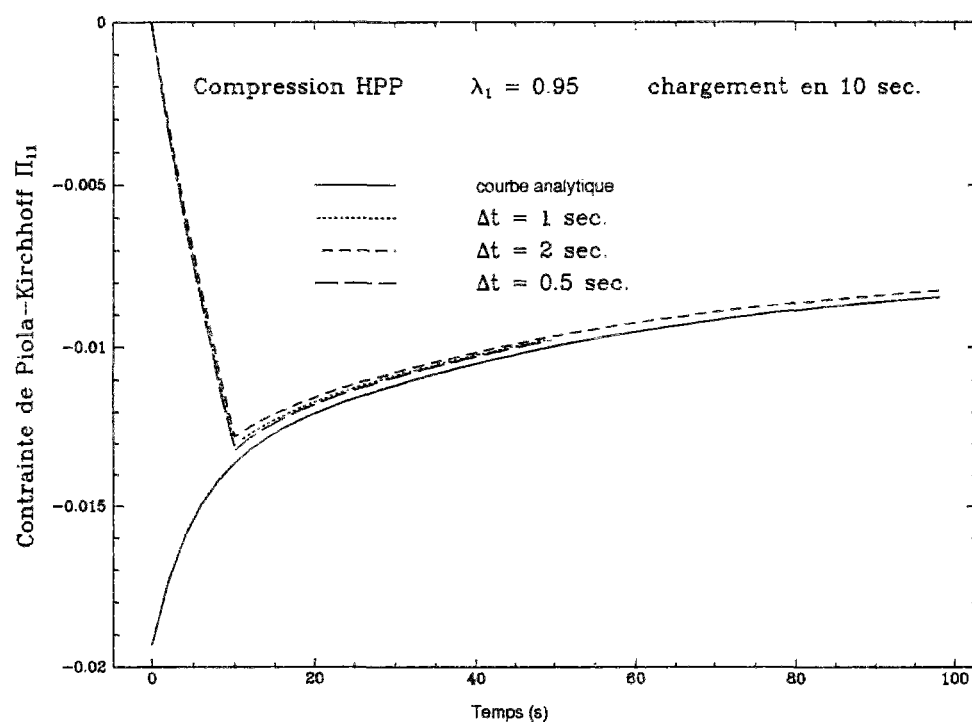
## ◇ Chargement quasi-instantané

Le déplacement imposé sur la face droite du cylindre est de la forme:

$$\underline{\mathbf{u}}(x, y; t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{u^d}{L} x \frac{t}{t_c} \\ \zeta \left( y - \frac{R}{2} \right) \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } t \leq t_c \\ \begin{pmatrix} \frac{u^d}{L} x \\ \zeta \left( y - \frac{R}{2} \right) \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } t > t_c \end{cases}$$

où  $t_c$  est le temps de chargement.

Dans le cas d'un chargement quasi-instantané, le temps de chargement  $t_c$  est pris faible par rapport au plus petit temps caractéristique (5 secondes). Dans les simulations, nous l'avons pris égal à 0.5 seconde. Le déplacement imposé vaut 0.5% de la longueur du cylindre. La contrainte résultante, calculée pour différents pas de temps allant de 0.025 seconde à 0.5 seconde, est comparée à la contrainte issue du calcul analytique. Les résultats sont représentés sur la figure 4.3.

FIG. 4.3 - *Contrainte uniaxiale homogène pour un chargement quasi-instantané*FIG. 4.4 - *Contrainte uniaxiale homogène pour un chargement lent*

On remarque sur la figure 4.3 que la solution numérique est proche de la solution analytique malgré une erreur au départ de 2% dans le meilleur des cas ( $\Delta t = 0.025$  s.). On remarque également que cette erreur diminue avec le temps. D'autre part, on constate que l'influence du pas de temps est significative au départ puisque l'erreur passe de 2% pour un pas de temps de 0.025 seconde à 6% pour un pas de temps de 0.5 seconde. Néanmoins, on voit que cette erreur s'atténue au cours du temps et que les quatre courbes tendent à se confondre.

#### ◇ Chargement lent

Dans ce paragraphe, on suppose que le chargement se fait en 10 secondes, soit deux fois le plus petit temps caractéristique, et on effectue des simulations pour trois pas de temps différents: 0.5, 1 et 2 secondes. La figure 4.4 montre la comparaison entre le résultat analytique et les résultats numériques pour les différents pas de temps.

La conclusion du paragraphe précédent est valable dans le cas présent. Cependant, on remarque que l'erreur au départ avec un pas de temps de 0.5 seconde est inférieure à celle obtenue avec le même pas de temps dans le cas du chargement quasi-instantané. Cela nous permet d'affirmer que ce n'est pas le pas de temps seul qui joue un rôle important mais le produit entre le temps de chargement et le plus petit temps caractéristique. Il suffit alors de prendre un pas de temps 10 à 20 fois plus petit que ce produit pour obtenir une bonne adéquation entre les résultats numériques et analytiques.

#### ◇ Champs de contrainte et de déplacement

Sur la figure 4.5, on a représenté les isovaleurs de déplacement et de contrainte à l'équilibre. On constate que le déplacement longitudinal est linéaire sur la longueur du cylindre et conforme aux conditions imposées (côté gauche fixe et côté droit déplacé de  $0.5\% \cdot L$ ). Le déplacement radial est également linéaire en fonction du rayon (nul sur l'axe de symétrie du cylindre et maximal sur le bord supérieur et égal à  $\zeta$ ).

D'autre part, la contrainte longitudinale  $\sigma_{11}$  (ou  $\sigma_{xx}$ ) et la contrainte radiale  $\sigma_{22}$  (ou  $\sigma_{yy}$ ) sont homogènes dans le cylindre et confirment l'hypothèse de champs de contrainte uniaxial. On remarquera néanmoins certaines instabilités numériques sur l'axe de symétrie du cylindre.

## 4.2 Compression hyperélastique

On se place dans le cadre des grandes déformations. On choisit comme mesure linéarisante, la mesure de déformation de Green-Lagrange ( $a_0 = 0$  et  $a_1 = 1$ ). Les conditions de chargement sont conformes à celles de la figure 4.2.

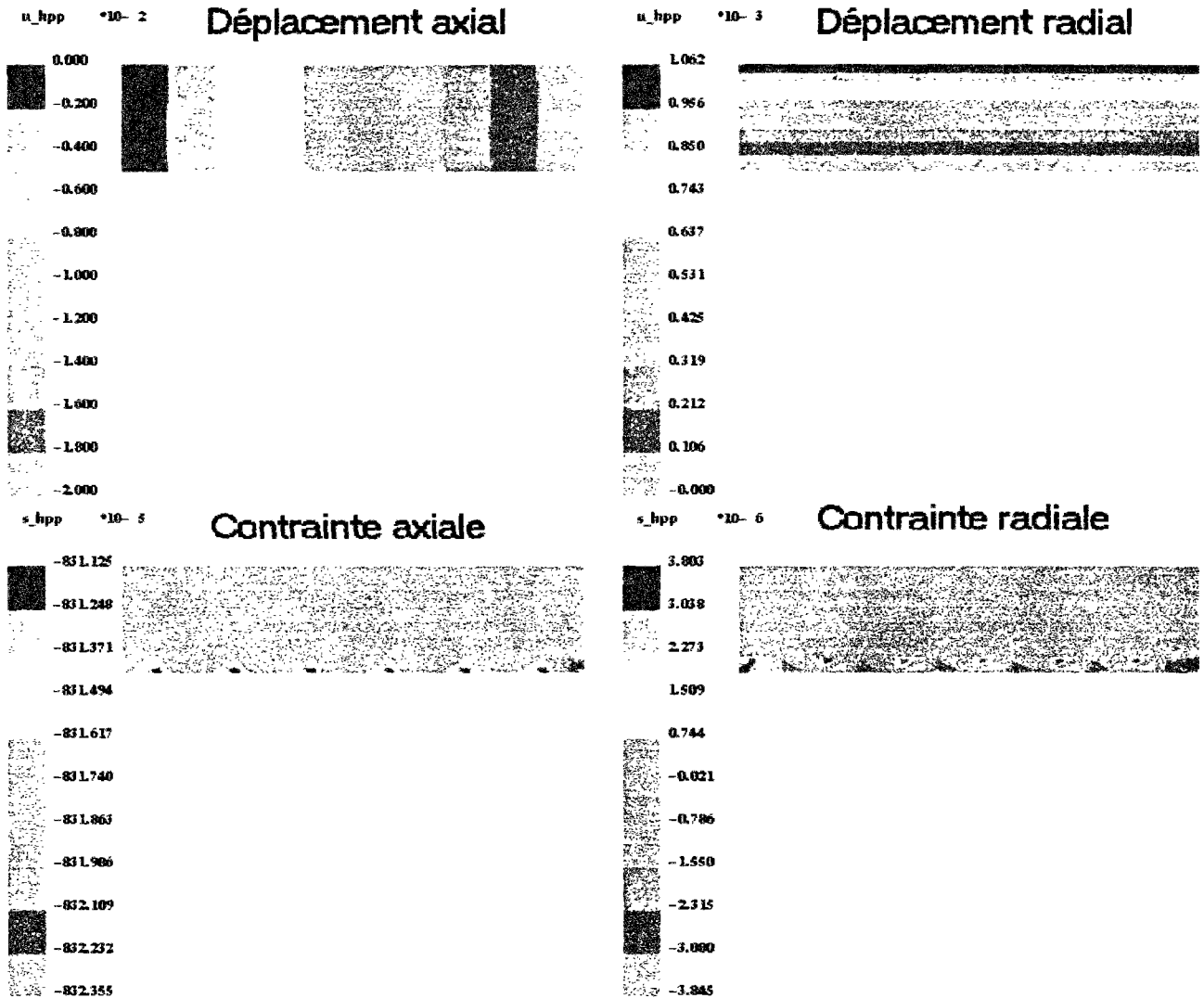


FIG. 4.5 - Champs de contrainte et de déplacement pour un essai en petites déformations

#### 4.2.1 Solution analytique

Le chargement imposé étant  $u_x = \frac{u^d}{L}$  sur la face droite du cylindre, le gradient de déplacement vaut:

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}} = \begin{pmatrix} \frac{u^d}{L} & 0 & 0 \\ 0 & u_{y,y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_y}{y} \end{pmatrix}$$

On suppose que les déplacements longitudinal et radial sont linéaires (ce qui



supprime les possibilités de flambement):

$$\begin{cases} u_x = \frac{u^d}{L} & x = \varepsilon x \\ u_y = \alpha y \end{cases}$$

où  $\alpha$  est une constante à déterminer.

Par conséquent, la déformation de Green-Lagrange s'écrit:

$$\underline{\underline{\Delta}} = \begin{pmatrix} \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right) & 0 & 0 \\ 0 & u_{y,y} \left(1 + \frac{1}{2}u_{y,y}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_y}{y} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{u_y}{y}\right) \end{pmatrix}$$

D'autre part, sachant que le tenseur de contrainte de Cauchy s'écrit:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

les équations d'équilibre conduisent, en coordonnées cylindriques, à (en l'absence de forces volumiques):

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(y) = b(y) \\ \sigma_{\theta\theta}(y) = a(y) \quad \text{avec} \quad \int_0^R a(v) dv = 0 \\ \sigma_{yy}(y) = \frac{1}{y} \int_0^y a(v) dv \end{cases}$$

D'autre part, la mesure linéarisante étant la déformation de Green-Lagrange, la contrainte de Piola-Kirchhoff 2  $\underline{\underline{\Pi}}$  s'écrit:

$$\underline{\underline{\Pi}} = \lambda \operatorname{tr} \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\mu \underline{\underline{\Delta}}$$

Donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{xx} = \lambda \left[ \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \right) + u_{y,y} \left( 1 + \frac{1}{2} u_{y,y} \right) + \frac{u_y}{y} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u_y}{y} \right) \right] + 2\mu \left[ \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \right) \right] \\ \quad = J b(y) \left( \frac{1}{1 + \varepsilon} \right)^2 \\ \Pi_{yy} = \lambda \left[ \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \right) + u_{y,y} \left( 1 + \frac{1}{2} u_{y,y} \right) + \frac{u_y}{y} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u_y}{y} \right) \right] + 2\mu \left[ u_{y,y} \left( 1 + \frac{1}{2} u_{y,y} \right) \right] \\ \quad = J \sigma_{yy} \frac{1}{(1 + u_{y,y})^2} \\ \Pi_{\theta\theta} = \lambda \left[ \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \right) + u_{y,y} \left( 1 + \frac{1}{2} u_{y,y} \right) + \frac{u_y}{y} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u_y}{y} \right) \right] + 2\mu \left[ \frac{u_y}{y} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u_y}{y} \right) \right] \\ \quad = J a(y) \left( \frac{y}{y + u_y} \right)^2 \end{array} \right.$$

où  $J$  est le déterminant du gradient de la transformation:

$$J = (1 + u_{y,y}) \left( 1 + \frac{u_y}{y} \right) (1 + \varepsilon)$$

On choisit la solution telle que  $a(y) = 0$ . Cette solution conduit à  $\Pi_{yy} = \Pi_{\theta\theta} = 0$ . Par conséquent,  $\alpha$  est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \left[ \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \right) + u_{y,y} \left( 1 + \frac{1}{2} u_{y,y} \right) + \frac{u_y}{y} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u_y}{y} \right) \right] + 2\mu \left[ u_{y,y} \left( 1 + \frac{1}{2} u_{y,y} \right) \right] = 0 \\ u_y = \alpha y \end{array} \right.$$

soit:

$$\alpha = -1 + \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \varepsilon \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right)}$$

Ainsi, une solution du problème est donc:

$$\underline{\underline{\Pi}} = \begin{pmatrix} \lambda \left[ \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \right) + 2\alpha \left( 1 + \frac{1}{2} \alpha \right) \right] + 2\mu \left[ \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon \right) \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\underline{\underline{\Delta}} = \begin{pmatrix} \varepsilon (1 + \frac{1}{2}\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha (1 + \frac{1}{2}\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha (1 + \frac{1}{2}\alpha) \end{pmatrix}$$

#### 4.2.2 Solution numérique à l'équilibre

Dans ce paragraphe, on effectue des simulations en grandes déformations et ce pour une large gamme de déformations et pour deux finesses de maillage. Les déformations varient de 50% en compression à 50% en traction. Les deux finesses de maillage sont des finesses  $4 \times 8$  et  $6 \times 12$ , c'est à dire que l'on a divisé le cylindre en 4 ou 6 suivant la longueur et 8 ou 12 suivant le rayon. Etant donnée la forme des mailles, la première finesse correspond à 192 mailles et la seconde à 432 mailles. Sur la figure 4.6, nous avons tracé, pour chacune des finesses, les évolutions de la contrainte axiale  $\Pi_{11}$  et de l'élongation radiale  $1 + \alpha$  en fonction de l'élongation axiale  $1 + \varepsilon$ .

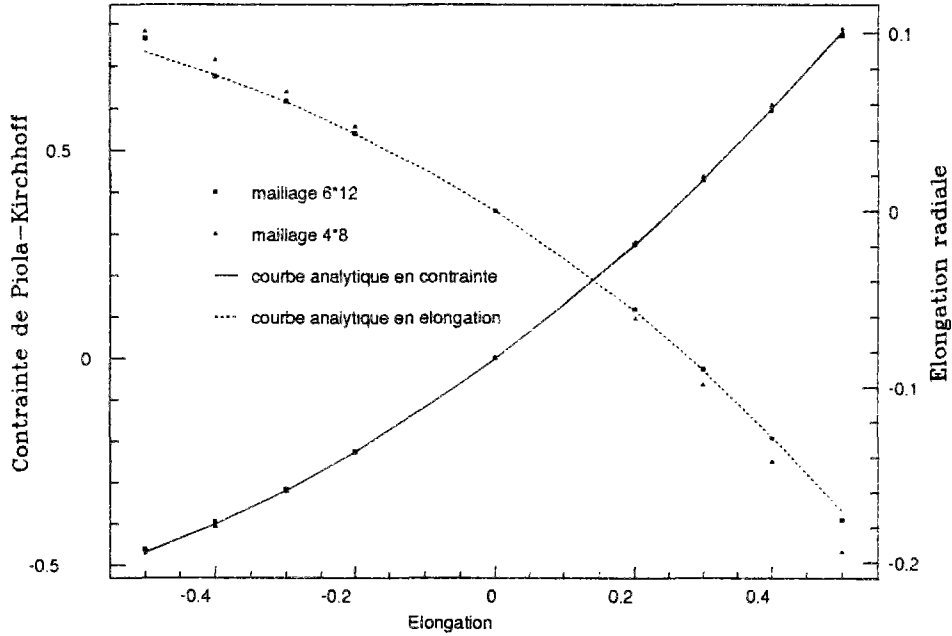


FIG. 4.6 - *Contrainte uniaxiale et élongation homogènes pour un comportement hyperélastique*

On constate que la contrainte est fidèlement reproduite pour les deux finesses alors que l'élongation radiale est reproduite avec une erreur de l'ordre de 10% pour la finesse  $4 \times 8$  dans le cas des grandes déformations et avec une faible erreur pour les déformations modérées. En revanche, pour la finesse  $6 \times 12$ , l'erreur sur

l'élongation est inférieure à 5% quelle que soit la déformation. Dans la suite, nous utiliserons des finesses  $6 \times 12$ .

### 4.3 Compression viscoélastique avec glissement (sans frettage)

Dans ce paragraphe, nous allons effectuer deux exemples de compression avec glissement (sans frettage) en viscoélasticité. Dans le premier, nous choisissons comme mesure linéarisante la mesure de Green-Lagrange et dans le second, une mesure quelconque sous forme d'une combinaison des invariants du tenseur de Cauchy-Green. Dans chacun de ces exemples, nous traçons les courbes d'évolution des différentes composantes du tenseur de contrainte  $\underline{\underline{S}}$  et ce, pour trois mailles différentes comme indiqué sur la figure 4.7. On entend par compression avec glissement une compression telle que les noeuds supérieurs droit et gauche sont susceptibles de se déplacer verticalement.

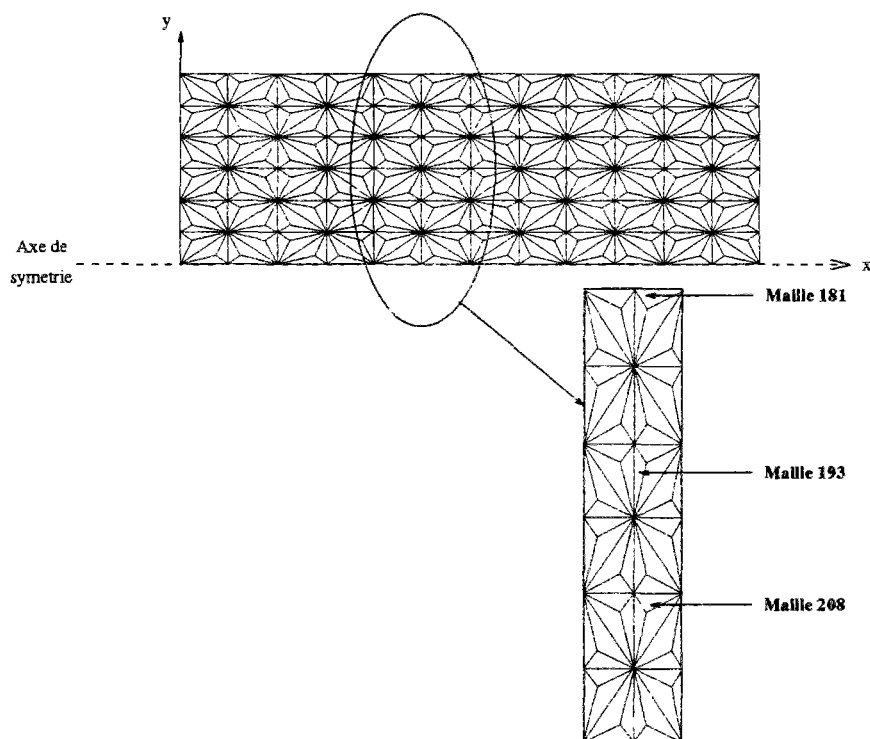


FIG. 4.7 - Mailles où sont calculées les contraintes pour la représentation graphique

### 4.3.1 Premier cas

La mesure de déformation est la mesure de Green-Lagrange. Par conséquent, le potentiel d'énergie libre s'écrit:

$$\Psi(t) = \int_0^t \int_0^t \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(2t - t_1 - t_2) : \underline{\underline{\dot{\Delta}}}(t_2) dt_1 dt_2$$

A l'équilibre, il s'écrit:

$$\Psi = \mu (I_1^C - 3) + \frac{1}{4} \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) (I_1^C - 3)^2 - \frac{1}{2} \mu (I_2^C - 3)$$

La contrainte prend la forme:

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}} = \underline{\underline{\Pi}} = \frac{\lambda}{4} (I_1^C - 3) \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \mu \underline{\underline{\Delta}}$$

Pour un essai de compression à 30% avec les conditions de la figure 4.2, le champs de contrainte aux trois mailles prédéfinies sur la figure 4.7 ont la forme décrite par la figure 4.8.

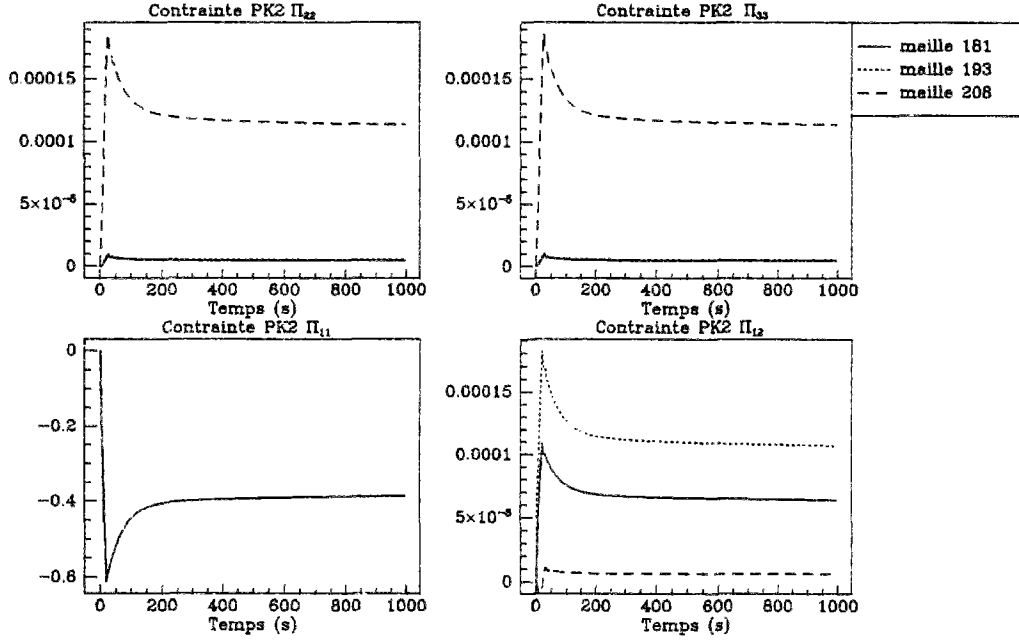


FIG. 4.8 - Evolution de la contrainte pour un comportement viscoélastique avec:  $\underline{\underline{\mathbb{E}}} = \underline{\underline{\Delta}}$ ,  $\Delta t = 1 \text{ sec.}$ ,  $t_c = 10 \text{ sec.}$

Cette figure nous inspire les remarques suivantes:

- les composantes  $\Pi_{22}$  et  $\Pi_{12}$  sont nulles dans la maille 181 ce qui confirme l'état de contrainte nulle au bord

- les composantes  $\Pi_{22}$  et  $\Pi_{12}$  sont très faibles dans les mailles 193 et 208 ce qui confirme l'aspect uniaxial du champs de contrainte
- les composantes  $\Pi_{22}$  et  $\Pi_{33}$  sont égales dans chaque maille
- la composante  $\Pi_{11}$  est la même pour toutes les mailles ce qui corrobore l'homogénéité du champs de contrainte

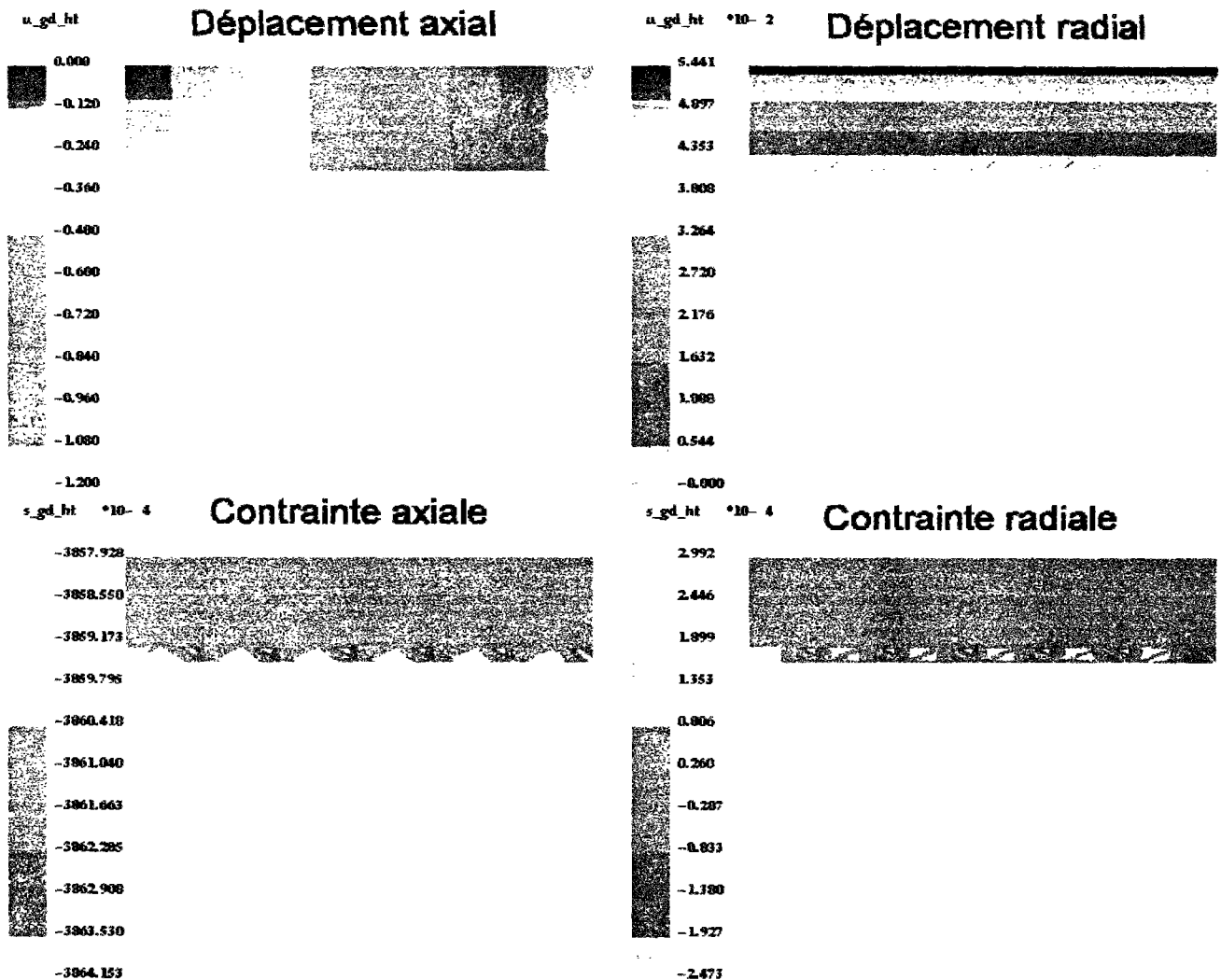


FIG. 4.9 - Champs de contrainte et de déplacement pour un cylindre en compression avec glissement (sans frettage)

#### 4.3.2 Second cas

Les coefficients  $a_0$  et  $a_1$  de la mesure de déformation sont une combinaison à l'ordre 3 des invariants de  $\underline{\underline{C}}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0.5 (I_2^C - 3) + 0.05 (I_1^C - 3)^2 + 0.01 (I_1^C - 3) (I_2^C - 3) \\ \quad + 0.25 (I_1^C - 3)^3 + 0.1 (I_3^C - 1) \\ a_1 = 1 + 0.75 (I_1^C - 3) + 0.5 (I_1^C - 3)^2 + 0.005 (I_2^C - 3) \\ \quad + 0.15 (I_1^C - 3) (I_2^C - 3) + 0.035 (I_1^C - 3)^3 + 0.3 (I_3^C - 1) \end{array} \right.$$

On notera qu'aux petites déformations, on a bien  $a_0 = 0$ ,  $\frac{\partial a_0}{\partial I_1^C} = 0$  et  $a_1 = 1$ .  
Le champ de contrainte généré par une compression de 30% sur ce matériau viscoélastique est illustré par la figure 4.10.

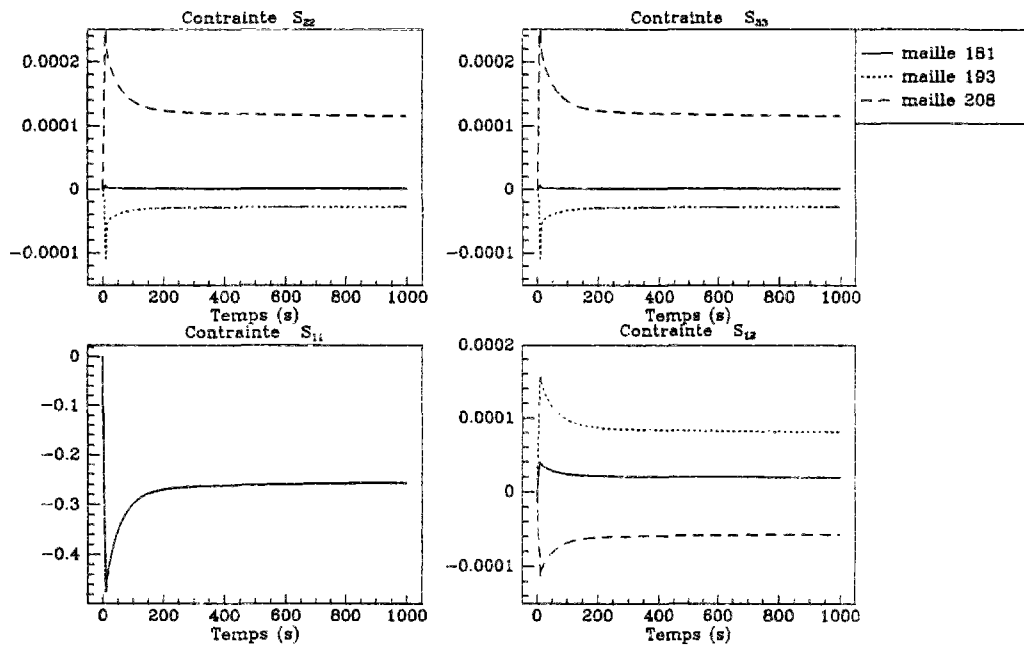


FIG. 4.10 - Evolution de la contrainte pour un comportement viscoélastique avec:  $\underline{\underline{\mathbb{E}}} = a_0 \underline{\underline{\mathbb{1}}} + a_1 \underline{\underline{\Delta}}$ ,  $\Delta t = 1 \text{ sec.}$ ,  $t_c = 10 \text{ sec.}$

Les remarques faites au cas précédent s'appliquent également à ce cas; seules les valeurs numériques diffèrent. On notera néanmoins que les champs de contraintes sont plus homogènes et qu'il y a moins d'instabilités numériques au niveau de l'axe de symétrie.





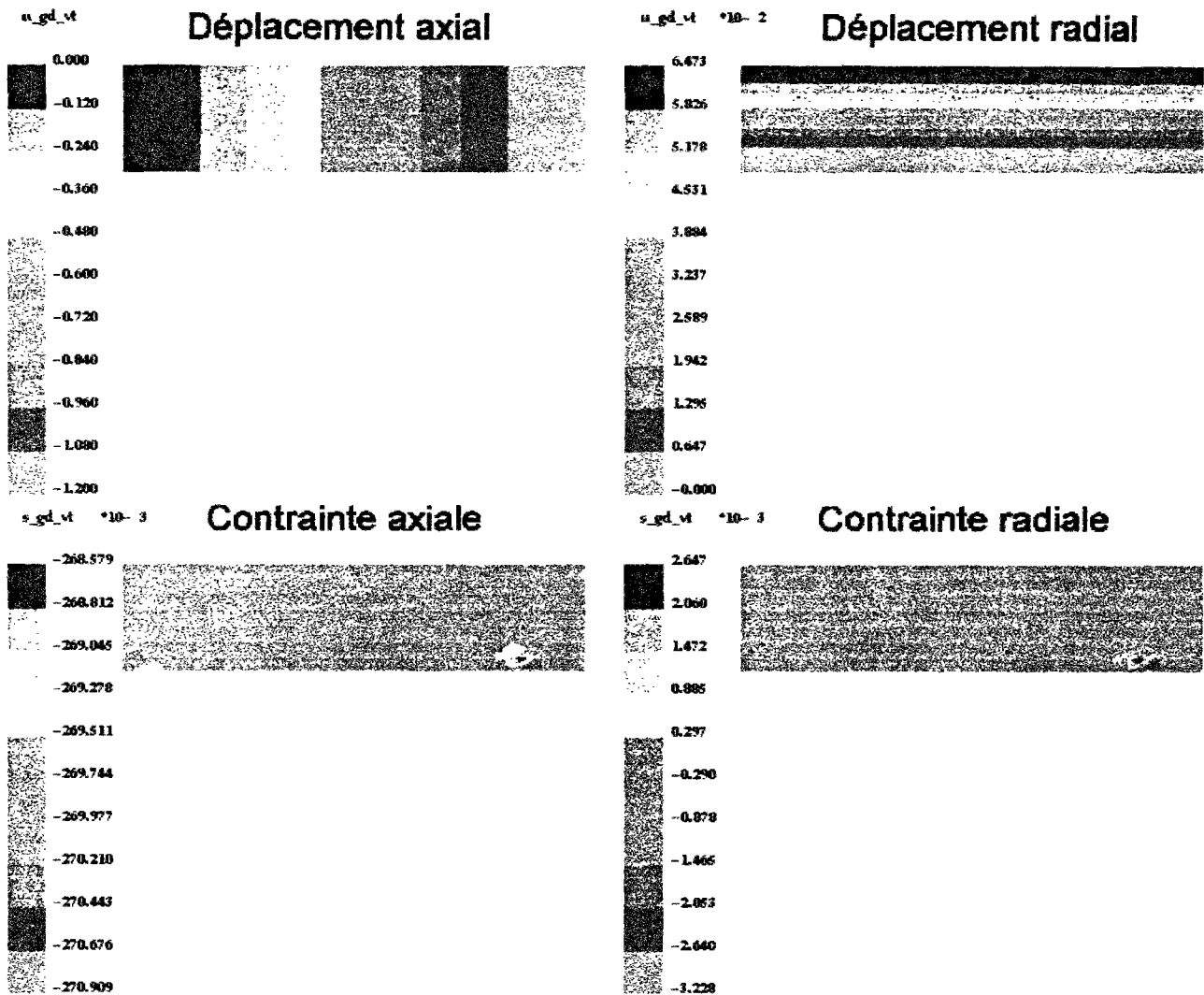


FIG. 4.11 - Champs de contrainte et de déplacement pour un cylindre viscoélastique en compression avec glissement

#### 4.4 Compression à sections constantes (avec frettage)

Dans ce paragraphe, nous effectuons une compression en grandes déformations sur un cylindre viscoélastique (avec  $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\Delta}}$ ) en maintenant constantes la section du cylindre sur laquelle le chargement s'effectue et la section opposée. Cela se matérialise par la fixation en déplacement vertical des deux noeuds supérieurs droit et gauche du cylindre. Les conditions de chargement sont décrites par la figure 4.12.

Les champs de déplacement et de contrainte générés sont conformes à ce que l'on attend comme le montre la figure 4.13. Les champs de déplacement montrent

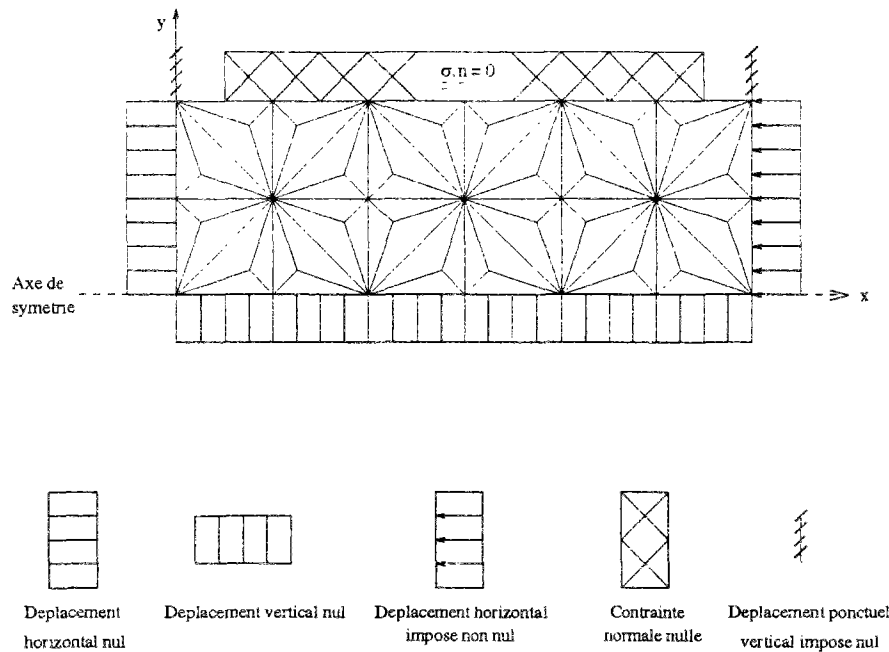


FIG. 4.12 - Conditions de sollicitation d'un cylindre en compression à section constante

l'effet tonneau que l'on obtient. Les champs de contrainte montrent qu'il s'agit également d'un essai uniaxial homogène puisque les composantes  $\Pi_{22}$ ,  $\Pi_{12}$  et  $\Pi_{33}$  sont nulles et la composante  $\Pi_{11}$  est la même dans tout le cylindre (sauf aux points où l'on a imposé un déplacement vertical nul correspondant à des instabilités numériques). On remarquera également que dans la zone homogène, on obtient les mêmes valeurs de contrainte que dans le cas de la compression avec glissement aux bords droit et gauche.

#### 4.4. COMPRESSION À SECTIONS CONSTANTES (AVEC FRETTAGE) 185

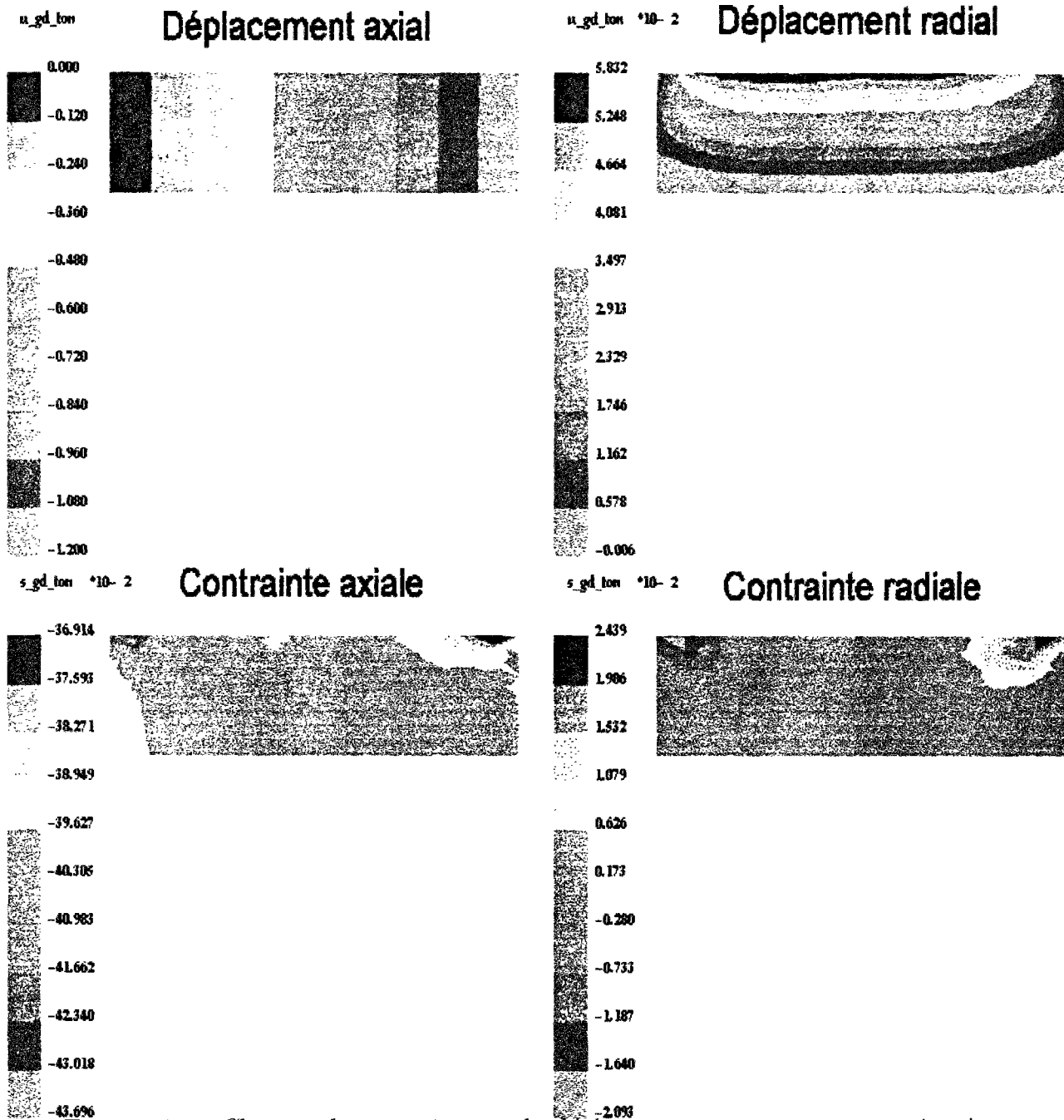


FIG. 4.13 - Champs de contrainte et de déplacement pour une compression à section constante

## 4.5 Chargement induisant du cisaillement

Dans ce paragraphe, nous appliquons au bord droit du cylindre un déplacement vertical linéaire comme le montre la figure 4.14.

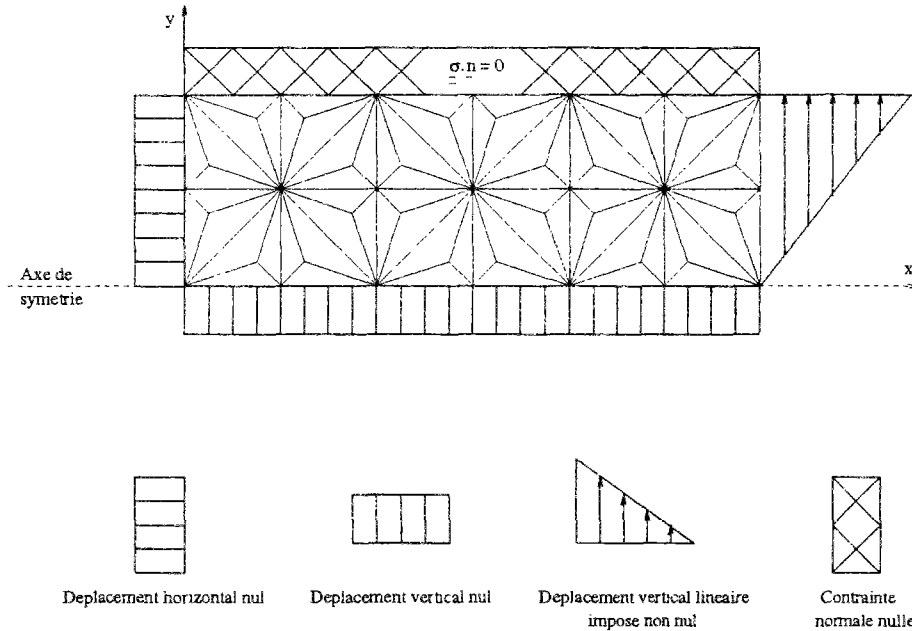


FIG. 4.14 - Conditions de sollicitation d'un cylindre en cisaillement

Ce chargement est de la forme:

$$u_y = \frac{u_M}{R} y$$

où  $u_M$  est le déplacement imposé en  $y = R$  et qui vaut 20% dans cet exemple. Graphiquement, ce déplacement a l'allure représentée sur la figure 4.15.

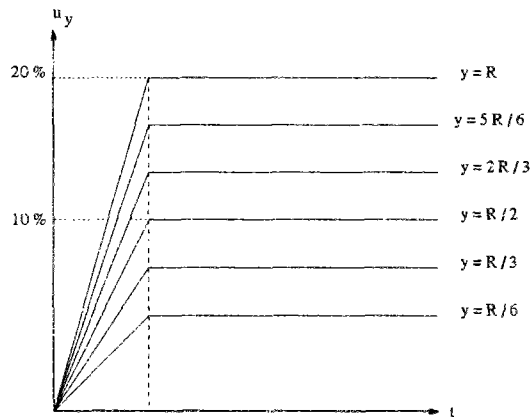


FIG. 4.15 - Déplacement vertical imposé sur le bord droit

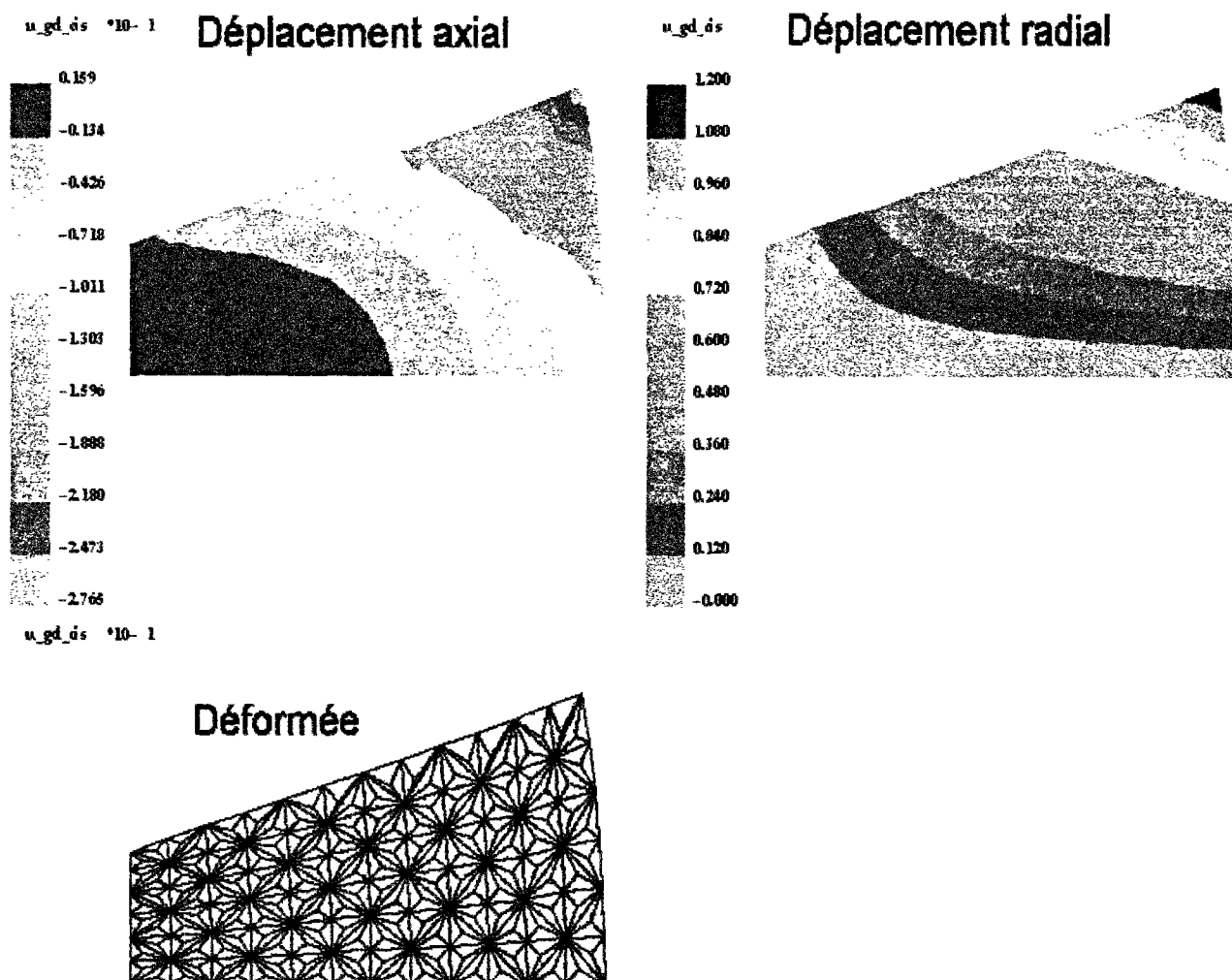


FIG. 4.16 - Champs de déplacement pour un cylindre en «pseudo-cisaillement»

Les champs de déplacement obtenus (figure 4.16) montrent que le déplacement vertical obtenu sur le bord supérieur est linéaire. En revanche, le déplacement horizontal induit est négatif sur le bord droit. Cela génère la déformée présentée sur la figure 4.16. Cet exemple est purement illustratif des possibilités du programme. Ce n'est pas, bien entendu, un exemple de validation dans la mesure où il doit être comparé à un essai réel.

## Conclusion de la troisième partie

Dans cette partie, nous avons montré comment les techniques de transformation de Laplace-Carson et du lagrangien augmenté étaient difficilement applicables à notre modèle. Cela nous a conduit à proposer une formulation et un algorithme différents basés sur des approximations justifiées lorsque le pas de temps est suffisamment petit. Moyennant ces approximations, le problème s'est réduit à un problème en déplacements uniquement que nous résolvons par la méthode de Cholesky. Nous avons utilisé des mailles particulières de Ruas et nous nous sommes restreints au cas axisymétrique. Nous avons ensuite validé notre algorithme en montrant que nous retrouvons les cas classiques des petites déformations et de l'hyperélasticité. Puis, nous avons effectué quelques simulations en viscoélasticité en grandes déformations qui ont se sont avérées conformes à ce que l'on attend mais dont les valeurs numériques méritent d'être confrontées à des cas réels.

## Conclusion et perspectives

Le but de ce travail était double. Dans un premier temps, il s'agissait du développement d'une loi de comportement viscoélastique non linéaire en grandes déformations. Le premier impératif de cette loi de comportement est d'être en mesure de rendre compte des non linéarités liées au matériau et aux grandes déformations. Le second impératif est de permettre un calcul aisé des grandeurs thermodynamiques du matériau. Dans un second temps, il fallait établir une formulation variationnelle associée à cette loi et construire un schéma numérique de résolution afin de réaliser un code de calcul par éléments finis permettant de faire du calcul de structures.

L'étude détaillée des différents modèles viscoélastiques selon les approches fonctionnelle et par variables d'état, nous a permis de constater certaines limites de ces modèles. L'approche fonctionnelle a l'inconvénient d'être extrêmement complexe dans le cas d'un développement intégral d'ordre élevé. L'approche par variables d'état devient également très complexe quand le nombre de variables est élevé, ce qui est nécessaire pour décrire les comportements réels.

C'est pourquoi nous avons voulu définir une loi de comportement qui soit facilement identifiable afin de ne pas retrouver les inconvénients des approches précédentes. La base du modèle réside dans le choix d'une mesure de déformation qui permette d'écrire le potentiel d'énergie libre sous forme quadratique. Par construction, la loi de comportement qui en découle recouvre tous les comportements basiques: petites déformations, hyperélastique et viscoélastique linéaire. L'identification de cette mesure nécessite la connaissance de deux paramètres: le potentiel élastique à l'équilibre et le potentiel instantané. Afin de décrire correctement le comportement global, la seconde grandeur à identifier est le tenseur de relaxation. Celui-ci est identifié par équivalence aux petites déformations. Bien que cela paraisse *a priori* peu rigoureux si l'on veut décrire des comportements en grandes déformations, nous avons montré, dans le cadre d'exemples, que cette approche conduisait à des résultats très satisfaisants comme en témoigne la comparaison entre le potentiel pseudo-linéaire et le potentiel écrit sous forme d'un

développement de Fréchet à l'ordre 4 (sous réserve que les fonctions mémoire du premier ordre recouvrent tout le spectre de relaxation).

Pour satisfaire au second impératif, en supposant le comportement identifié, nous avons effectué des simulations en oscillations afin de mettre en évidence une hystérésis de déformation synonyme de dissipation. Cette étude nous a permis de montrer comment le calcul des grandeurs thermodynamiques était possible. De plus, nous avons montré la différence de dissipation entre des oscillations autour de la position neutre et des oscillations autour d'une position quelconque.

La dernière partie de ce travail avait pour but de nous amener à construire un code de calcul par éléments finis en y intégrant cette loi de comportement. Deux approches étaient possibles: la première consistait à se placer en espace transformé par la transformation de Laplace-Carson à une dimension conformément à ce qui se fait en petites déformations; la seconde consistait à appliquer, à chaque instant, la technique du lagrangien augmenté. La première méthode a rapidement montré ses limites car nous n'étions pas en présence uniquement, dans les équations qui régissent le comportement, de produits de convolution comme en témoigne la forme de la mesure de déformation. La seconde approche supposait que l'espace de projection était de forme simple comme c'est le cas en hyperélasticité. Etant donné la forme de la mesure de déformation, cette approche s'est révélée être difficilement utilisable. Nous avons alors essayé d'utiliser la transformée multiple de Laplace-Carson afin de nous ramener à un problème hyperélastique mais cette méthode s'est révélée vaine en raison de la forme particulière de la mesure de déformation qui ne peut être transposée, dans le cas général, dans l'espace transformé.

Nous avons donc choisi de nous ramener à un problème en déplacements uniquement et ce *via* deux approximations: la première suppose que la vitesse et la vitesse de déformation sont constantes par morceaux; la seconde est une approximation au premier ordre de la relation entre la déformation et le gradient de déplacement. Ces deux approximations sont justifiées si le pas de temps est suffisamment petit. Moyennant ces deux approximations, nous nous sommes ramenés à un problème classique d'éléments finis que nous avons résolu par la méthode de Cholesky. Cet algorithme a été validé dans des cas classiques de compression axisymétrique en petites déformations et en hyperélasticité. Il a également conduit à des résultats logiques (compression tonneau et «pseudo-cisaillement») en viscoélasticité non linéaire.

Bien entendu, la seule véritable validation, aussi bien du modèle que de l'algorithme, est une validation expérimentale sur matériaux réels. Cette validation nous permettrait de juger de la facilité d'identification ainsi que de la justesse du modèle.

On peut néanmoins améliorer la performance du modèle selon deux axes. Le premier concerne l'extension aux matériaux incompressibles; on linéarise le



comportement de la même façon que dans le cas compressible en choisissant la même mesure de déformation mais avec un potentiel d'énergie libre sous la forme:

$$\Psi = \nu \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr} (\underline{\underline{\mathbf{E}}})^2 + \mu \operatorname{tr} \underline{\underline{\mathbf{E}}}^2$$

Le second a pour objectif d'explorer d'autres mesures de déformation en gardant dans l'expression de la mesure de déformation le terme en  $a_2$  sous forme de fonction des invariants du tenseur Green-Lagrange et en l'identifiant par des essais oscillatoires par exemple. Cela nous permettrait d'explorer une plus large gamme de déformations, jusqu'à plusieurs centaines de pour-cent.

Du point de vue numérique, on peut également apporter un certain nombre d'améliorations. La première amélioration serait d'augmenter l'ordre d'approximation de la vitesse et de la vitesse de déformation ainsi que la relation entre mesure de déformation et gradient de déplacement. Cette modification nous permettrait de choisir un pas de temps plus grand ce qui permettrait d'atteindre l'équilibre plus rapidement. Le gain en temps de calcul est certain. On pourrait, en outre, étendre l'exploration des mesure de déformation à une plus large gamme qui, dans l'état actuel, est limitée à un développement polynomial des invariants du tenseur de Cauchy-Green. Le programme actuel est limité au cas axisymétrique. Une amélioration supplémentaire serait d'étendre l'étude au cas tridimensionnel. Cette extension nécessite la modification de la forme des mailles car celle utilisée n'est propice qu'au cas axisymétrique. La forme quadrilatère à quatre noeuds peut s'avérer suffisante. On aurait alors à modifier les fonctions de forme, la forme du gradient de déplacement dont les inconnues seraient au nombre de 9. On pourrait également prendre en compte l'influence de la température sur les fonction de relaxation. Enfin, une dernière perspective de ce travail serait la prise en compte du flambement.

Malgré l'étendue du travail qui doit encore être effectuée, le code de calcul réalisé représente une ossature importante et nécessaire à toute autre amélioration dans la mesure où il a montré de nettes concordances avec des cas classiques mais néanmoins souvent utilisés ainsi que des possibilités certaines en viscoélasticité non linéaire en grandes déformations.



## Annexes



## Annexe A

### Détermination de $I_4$ en fonction des autres invariants de $\underline{\underline{A}}$

Les valeurs propres d'un tenseur d'ordre 2  $\underline{\underline{A}}$  sont les zéros du polynôme caractéristique de  $\underline{\underline{A}}$  soit les solutions de l'équation  $\det(\underline{\underline{A}} - X \cdot \underline{\underline{1}}) = 0$ . Si on développe cette équation, on est conduit à:

$$-X^3 + I_1 \cdot X^2 - I'_2 \cdot X + \det(\underline{\underline{A}}) = 0$$

avec:

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{A}}) : 1^{\text{er}} \text{ invariant} \\ I'_2 = \frac{1}{2} \left( [\text{tr}(\underline{\underline{A}})]^2 - \text{tr}(\underline{\underline{A}}^2) \right) : 2^{\text{ème}} \text{ invariant} \end{cases}$$

Selon le théorème de Cayley-Hamilton, on a:

$$\text{A.1} \quad -\underline{\underline{A}}^3 + I_1 \cdot \underline{\underline{A}}^2 - I'_2 \cdot \underline{\underline{A}} + \det(\underline{\underline{A}}) \cdot \underline{\underline{1}} = 0$$

En prenant la trace de la relation précédente (A.1), on obtient:

$$\text{A.2} \quad \det(\underline{\underline{A}}) = \frac{1}{3} \left( \text{tr}(\underline{\underline{A}}^3) - \frac{3}{2} \text{tr}(\underline{\underline{A}}) \cdot \text{tr}(\underline{\underline{A}}^2) + \frac{1}{2} [\text{tr}(\underline{\underline{A}})]^3 \right)$$

Si on multiplie les deux membres de l'équation (A.1) par  $\underline{\underline{A}}$  et en prenant la trace, on trouve, en utilisant (A.2):

$$\text{tr}(\underline{\underline{A}}^4) = 4 I_4 = \frac{1}{6} I_1^4 + 4 I_1 I_3 + 2 I_2^2 - 2 I_1^2 I_2$$

avec:

$$\begin{cases} I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{A}}^2) : 2^{\text{ème}} \text{ invariant de } \underline{\underline{A}} \\ I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{A}}^3) : 3^{\text{ème}} \text{ invariant de } \underline{\underline{A}} \end{cases}$$

## Annexe B

### Coefficients des fonctions mémoire

#### B.1 Un temps caractéristique par décade

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.25 & 0.2 & 0.15 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.1 & 0.15 & 0.1 \\ 0.15 & 0.1 & 0.05 \\ 0.1 & 0.15 & 0.1 \\ 1.5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

#### B.2 Deux temps caractéristiques par décade

$$b'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.1 & 0.15 & 0.1 \\ 0.15 & 0.1 & 0.15 \\ 0.1 & 0.05 & 0.1 \\ 0.75 & 0.75 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.75 & 0.75 \\ 0.75 & 0.5 & 0.75 \\ 0.5 & 0.75 & 0.5 \end{pmatrix}$$

**B.3 Trois temps caractéristiques par décade**

$$b''_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.75 & 2 \\ 0.2 & 0.75 & 0.5 \\ 0.15 & 0.5 & 0.5 \\ 0.15 & 0.15 & 0.05 \\ 0.15 & 0.2 & 1 \\ 1 & 1 & 1.5 \\ 0.5 & 0.2 & 0.75 \\ 2 & 1.5 & 0.5 \\ 1.5 & 0.75 & 0.15 \end{pmatrix}$$





## Annexe C

# Simulations relatives aux chargements A à I

Dans les figures (C.1) à (C.8), nous avons utilisé la légende suivante:

----	ERREUR SUR LE POTENTIEL
.....	CONTRAINTE PSEUDO-LINEAIRE
———	CONTRAINTE DE FRECHET



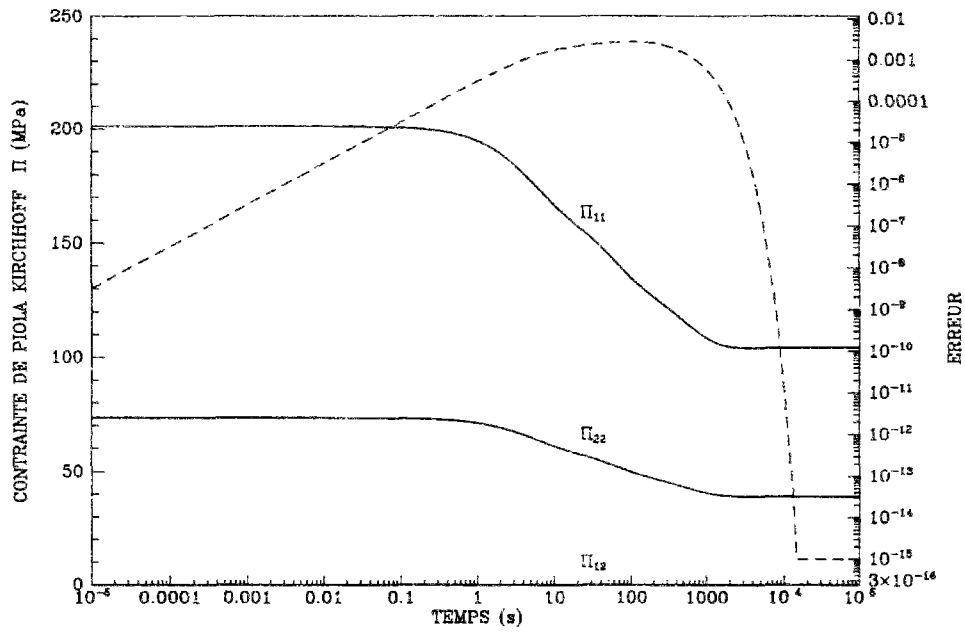


FIG. C.1 - *Chargement A: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel*

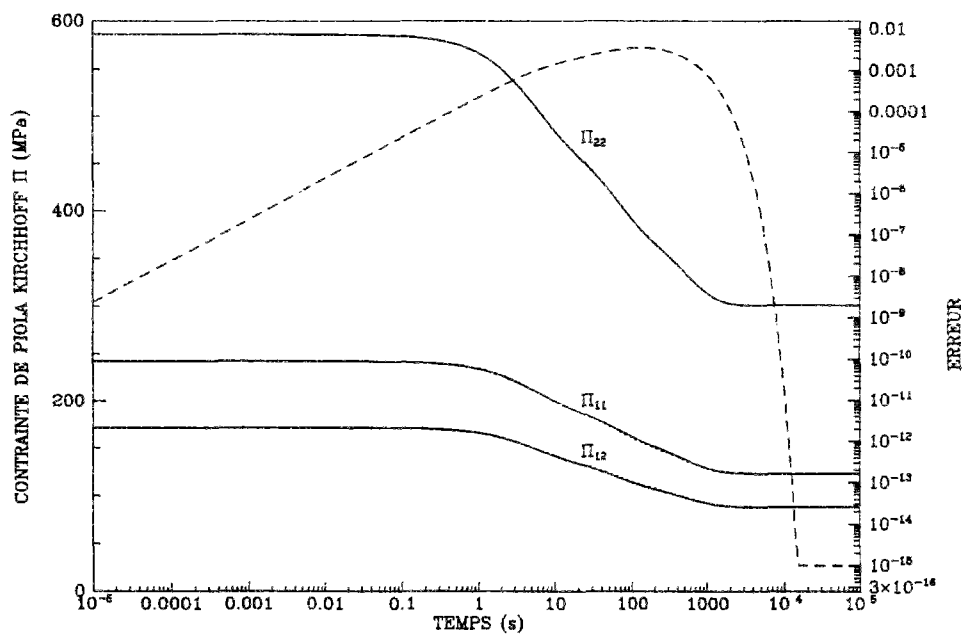
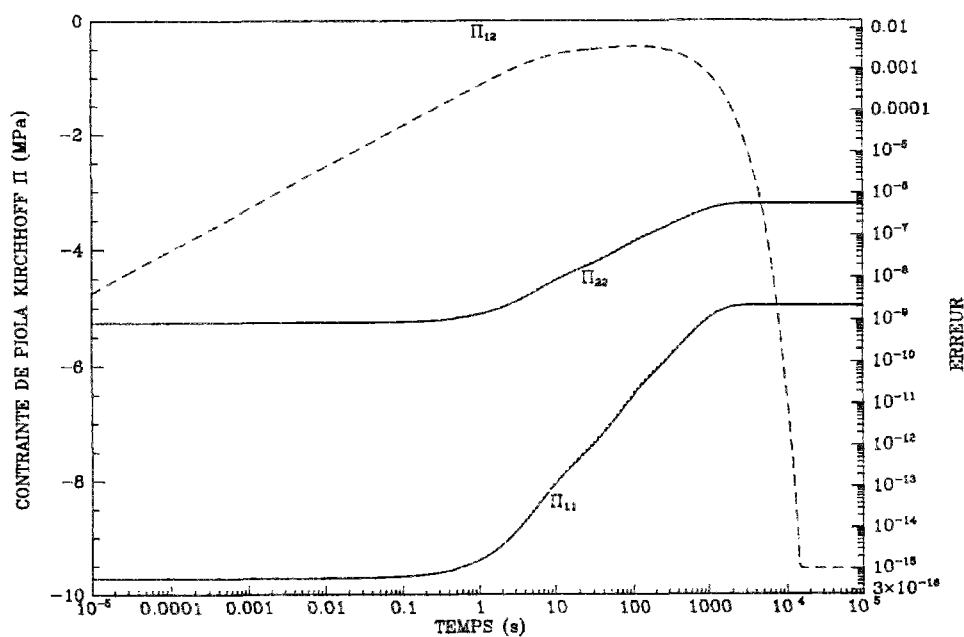
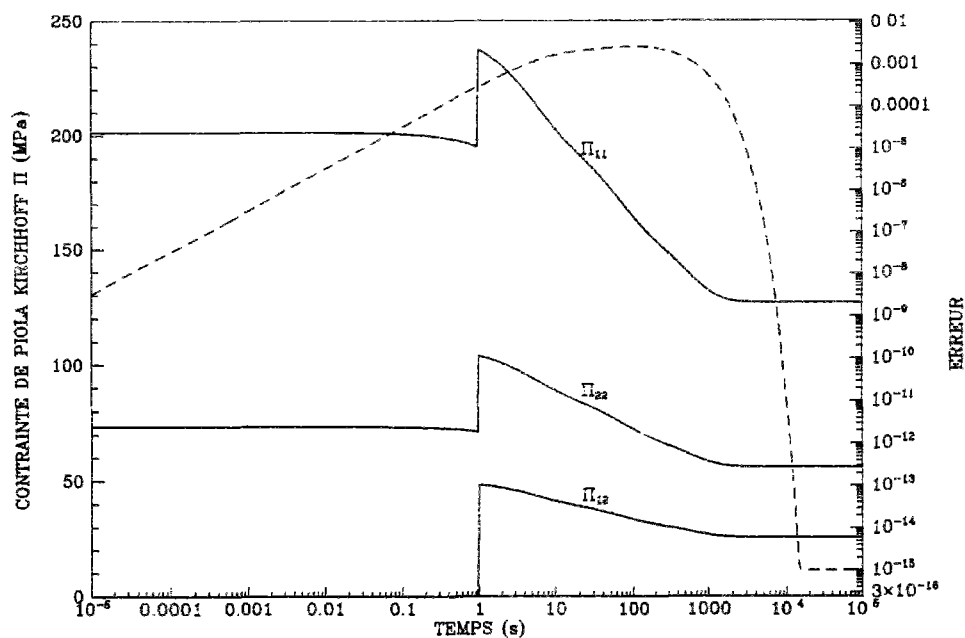


FIG. C.2 - *Chargement B: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel*

FIG. C.3 - *Chargement C: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel*FIG. C.4 - *Chargement D: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel*

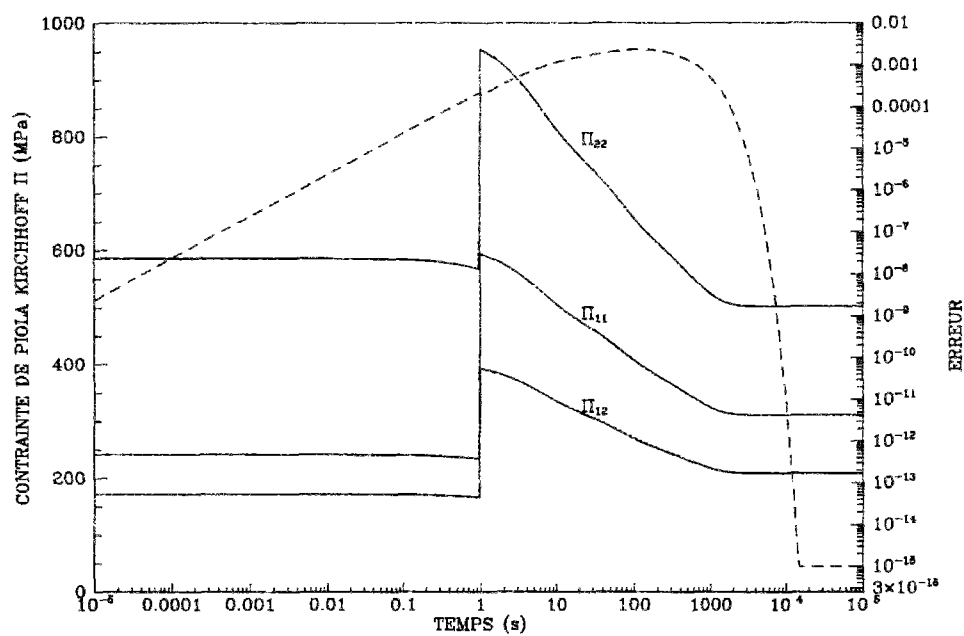


FIG. C.5 - *Chargement E: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel*

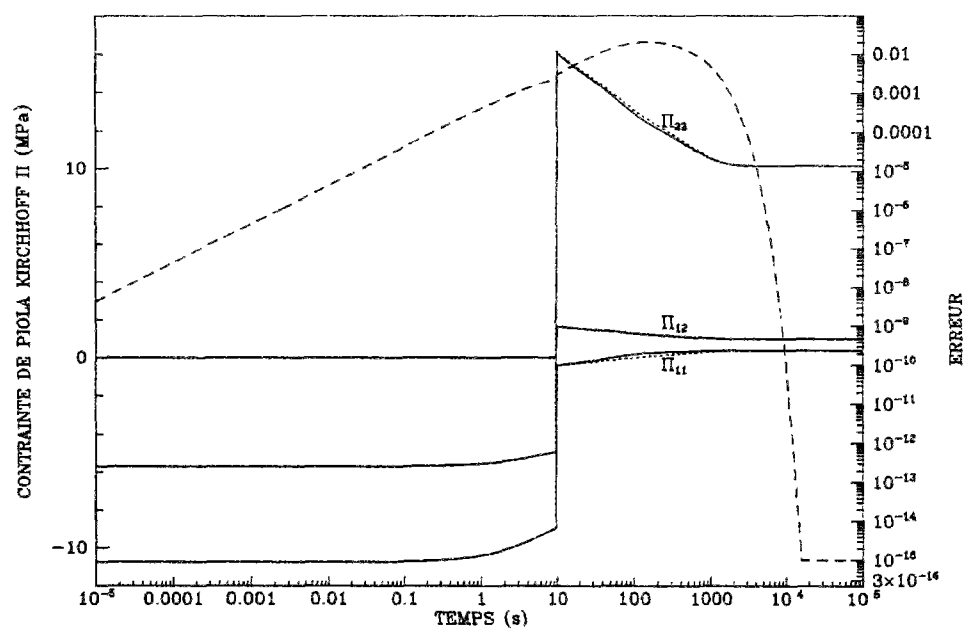
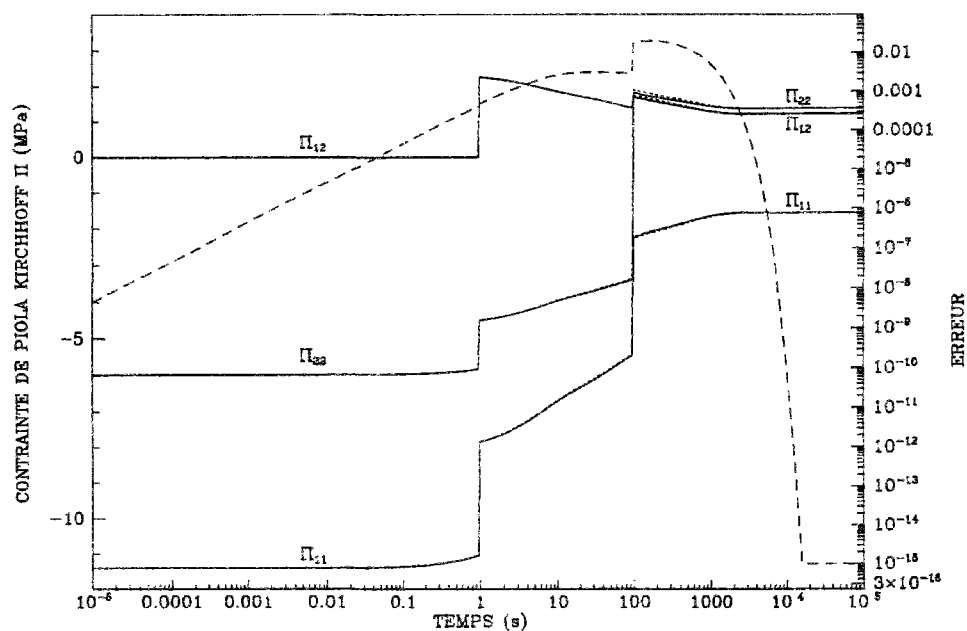
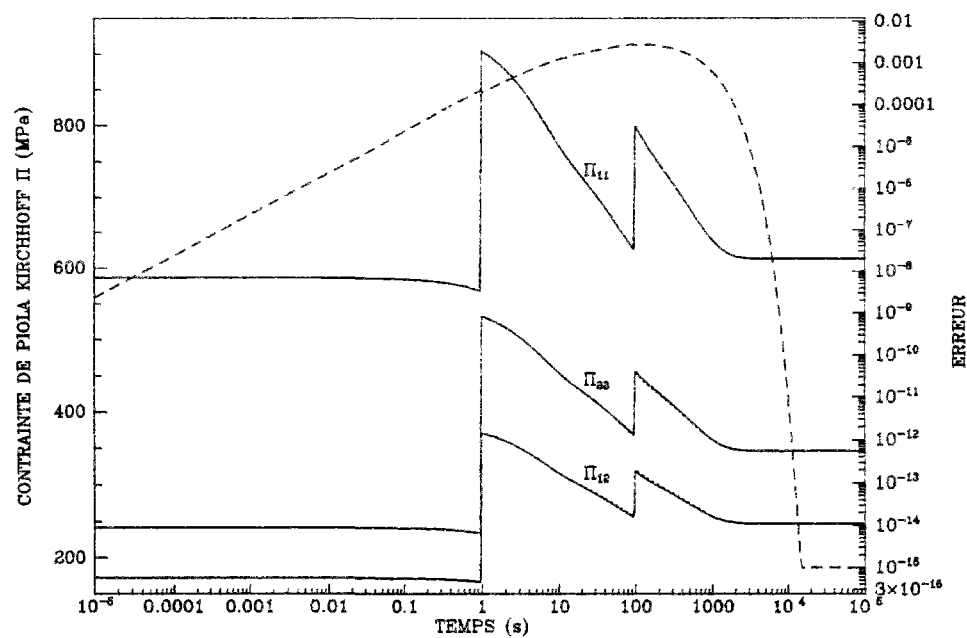


FIG. C.6 - *Chargement F: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel*

FIG. C.7 - *Chargement H: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel*FIG. C.8 - *Chargement I: Contrainte de Piola-Kirchhoff et erreur sur le potentiel*

## Annexe D

### Calcul de la matrice de rigidité élémentaire

Il s'agit de calculer les intégrales:

$$\mathbf{D.3} \quad 4 \pi S \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t \underline{\underline{\kappa}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{\kappa}} y(\xi, \eta) d\eta d\xi$$

avec:

$$\underline{\underline{\kappa}} = \begin{pmatrix} (a \langle \underline{N}_1 \rangle + a' \langle \underline{N}_2 \rangle) \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} & 0 \\ 0 & (b \langle \underline{N}_1 \rangle + b' \langle \underline{N}_2 \rangle) \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \\ 0 & \frac{\langle \underline{N} \rangle \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}}{y} \\ (b \langle \underline{N}_1 \rangle + b' \langle \underline{N}_2 \rangle) \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} & 0 \\ 0 & (a \langle \underline{N}_1 \rangle + a' \langle \underline{N}_2 \rangle) \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \\ 0 & \kappa_3 \\ \kappa_2 & 0 \\ 0 & \kappa_1 \end{pmatrix}$$

et

$$y(\xi, \eta) = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta$$

Par conséquent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{^t\kappa \cdot \mathcal{K} \cdot \kappa\}_{11} = (^t\kappa_1\mathcal{K}_{11} + ^t\kappa_2\mathcal{K}_{14})\kappa_1 + (^t\kappa_1\mathcal{K}_{14} + ^t\kappa_2\mathcal{K}_{44})\kappa_2 \\ \{^t\kappa \cdot \mathcal{K} \cdot \kappa\}_{12} = (^t\kappa_1\mathcal{K}_{12} + ^t\kappa_2\mathcal{K}_{24})\kappa_2 + (^t\kappa_1\mathcal{K}_{13} + ^t\kappa_2\mathcal{K}_{34})\kappa_3 \\ \quad + (^t\kappa_1\mathcal{K}_{15} + ^t\kappa_2\mathcal{K}_{45})\kappa_1 \\ \{^t\kappa \cdot \mathcal{K} \cdot \kappa\}_{21} = (^t\kappa_2\mathcal{K}_{12} + ^t\kappa_3\mathcal{K}_{13} + ^t\kappa_1\mathcal{K}_{15})\kappa_1 \\ \quad + (^t\kappa_2\mathcal{K}_{24} + ^t\kappa_3\mathcal{K}_{34} + ^t\kappa_1\mathcal{K}_{45})\kappa_2 \\ \{^t\kappa \cdot \mathcal{K} \cdot \kappa\}_{22} = (^t\kappa_2\mathcal{K}_{22} + ^t\kappa_3\mathcal{K}_{23} + ^t\kappa_1\mathcal{K}_{25})\kappa_2 + (^t\kappa_2\mathcal{K}_{23} + ^t\kappa_3\mathcal{K}_{33} + ^t\kappa_1\mathcal{K}_{35})\kappa_3 \\ \quad + (^t\kappa_2\mathcal{K}_{25} + ^t\kappa_3\mathcal{K}_{35} + ^t\kappa_1\mathcal{K}_{55})\kappa_1 \end{array} \right.$$

Sachant que  $\underline{\underline{\mathcal{K}}}$  est constant par maille, on est amené à calculer les intégrales suivantes:

$$N^{11} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t\langle \underline{N}_1 \rangle \cdot \langle \underline{N}_1 \rangle y(\xi, \eta) d\eta d\xi$$

$$N^{12} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t\langle \underline{N}_1 \rangle \cdot \langle \underline{N}_2 \rangle y(\xi, \eta) d\eta d\xi$$

$$N^{22} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t\langle \underline{N}_2 \rangle \cdot \langle \underline{N}_2 \rangle y(\xi, \eta) d\eta d\xi$$

$$N^{10} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t\langle \underline{N}_1 \rangle \cdot \langle \underline{N} \rangle d\eta d\xi$$

$$N^{20} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t\langle \underline{N}_2 \rangle \cdot \langle \underline{N} \rangle d\eta d\xi$$

dont les valeurs sont:

$$\text{D.4} \quad N^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(y_1 + y_2 + y_3) & 0 & \frac{1}{24}(3y_1 + 5y_2 + 4y_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24}(3y_1 + 5y_2 + 4y_3) & 0 & \frac{1}{60}(7y_1 + 17y_2 + 11y_3) \end{pmatrix}$$



$$\text{D.5} \quad N^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(y_1 + y_2 + y_3) & \frac{1}{24}(y_1 + 2y_2 + y_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24}(3y_1 + 5y_2 + 4y_3) & \frac{1}{120}(5y_1 + 14y_2 + 6y_3) \end{pmatrix}$$

$$\text{D.6} \quad N^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(y_1 + y_2 + y_3) & \frac{1}{24}(y_1 + 2y_2 + y_3) \\ 0 & 0 & \frac{1}{24}(y_1 + 2y_2 + y_3) & \frac{1}{60}(y_1 + 3y_2 + y_3) \end{pmatrix}$$

$$\text{D.7} \quad N^{10} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{24} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{D.8} \quad N^{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

En revanche, l'intégrale

$$N^{00} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \frac{{}^t \langle \underline{N} \rangle \cdot \langle \underline{N} \rangle}{y(\xi, \eta)} d\eta d\xi$$

présentant une indétermination en  $y = 0$ , se calcule aux points de Gauss. Le produit  ${}^t \langle \underline{N} \rangle \cdot \langle \underline{N} \rangle$  vaut:

$${}^t \langle \underline{N} \rangle \cdot \langle \underline{N} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi(\xi + \eta) \\ \xi & \xi^2 & \xi\eta & \xi^2(\xi + \eta) \\ \eta & \xi\eta & \eta^2 & \xi\eta(\xi + \eta) \\ \xi(\xi + \eta) & \xi^2(\xi + \eta) & \xi\eta(\xi + \eta) & \xi^2(\xi + \eta)^2 \end{pmatrix}$$

Si on note  $\tilde{\xi}_i$  et  $\tilde{\eta}_i$  les coordonnées du point de Gauss numéro  $i$  et  $\tilde{\omega}_i$  le poids relatif à ce point de Gauss, alors, on a :

$$\text{D.9} \quad N_{ij}^{00} = \sum_{k=1}^{ng} \frac{\{ {}^t \langle N \rangle \cdot \langle N \rangle \}_{ij}}{y(\tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_k)} \tilde{\omega}_k$$

où  $ng$  est le nombre de points de Gauss. Par conséquent, la matrice de rigidité élémentaire s'écrit :

$$\underline{\underline{\mathcal{R}}}^{el} = 4 \pi S \begin{pmatrix} \underline{\underline{\tilde{\mathcal{R}}}}^{11} & \underline{\underline{\tilde{\mathcal{R}}}}^{12} \\ \underline{\underline{\tilde{\mathcal{R}}}}^{21} & \underline{\underline{\tilde{\mathcal{R}}}}^{22} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tilde{\mathcal{R}}}}^{11} &= {}^t \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[ a^2 N^{11} + a a' ( {}^t N^{12} + N^{12} ) + a'^2 N^{22} \right] \mathcal{K}_{11} \\ & + [ a \ b N^{11} + b a' {}^t N^{12} + a b' N^{12} + a' b' N^{22} ] \mathcal{K}_{14} \\ & + [ a \ b {}^t N^{11} + b a' {}^t N^{12} + a b' N^{12} + a' b' {}^t N^{22} ] \mathcal{K}_{14} \\ & + \left[ b^2 N^{11} + b b' ( {}^t N^{12} + N^{12} ) + b'^2 N^{22} \right] \mathcal{K}_{44} \end{aligned} \right\} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \\ \underline{\underline{\tilde{\mathcal{R}}}}^{12} &= {}^t \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[ a^2 N^{11} + a a' ( {}^t N^{12} + N^{12} ) + a'^2 N^{22} \right] \mathcal{K}_{15} \\ & + [ a \ b N^{11} + b a' {}^t N^{12} + a b' N^{12} + a' b' N^{22} ] \mathcal{K}_{12} \\ & + [ a \ b {}^t N^{11} + b a' {}^t N^{12} + a b' N^{12} + a' b' {}^t N^{22} ] \mathcal{K}_{45} \\ & + \left[ b^2 N^{11} + b b' ( {}^t N^{12} + N^{12} ) + b'^2 N^{22} \right] \mathcal{K}_{24} \\ & + N_{13}^{00} \mathcal{K}_{13} + N_{23}^{00} \mathcal{K}_{34} \end{aligned} \right\} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \\ \underline{\underline{\tilde{\mathcal{R}}}}^{21} &= {}^t \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[ a^2 N^{11} + a a' ( {}^t N^{12} + N^{12} ) + a'^2 N^{22} \right] \mathcal{K}_{15} \\ & + [ a \ b N^{11} + b a' {}^t N^{12} + a b' N^{12} + a' b' N^{22} ] \mathcal{K}_{45} \\ & + [ a \ b {}^t N^{11} + b a' {}^t N^{12} + a b' N^{12} + a' b' {}^t N^{22} ] \mathcal{K}_{12} \\ & + \left[ b^2 N^{11} + b b' ( {}^t N^{12} + N^{12} ) + b'^2 N^{22} \right] \mathcal{K}_{24} \\ & + N_{31}^{00} \mathcal{K}_{13} + N_{32}^{00} \mathcal{K}_{34} \end{aligned} \right\} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\tilde{\mathcal{K}}}^{21} = {}^t\underline{P}^{-1} \cdot \{ & \left[ a^2 N^{11} + aa' ({}^t N^{12} + N^{12}) + a'^2 N^{22} \right] \mathcal{K}_{55} \\
& + [a \ b N^{11} + ba' {}^t N^{12} + ab' N^{12} + a'b' N^{22}] \mathcal{K}_{25} \\
\textbf{D.13} \quad & + [a \ b {}^t N^{11} + ba' {}^t N^{12} + ab' N^{12} + a'b' {}^t N^{22}] \mathcal{K}_{25} \\
& + \left[ b^2 N^{11} + bb' ({}^t N^{12} + N^{12}) + b'^2 N^{22} \right] \mathcal{K}_{22} \\
& + (N_{13}^{00} + N_{31}^{00}) \mathcal{K}_{35} + (N_{23}^{00} + N_{32}^{00}) \mathcal{K}_{23} + N_{33}^{00} \mathcal{K}_{33} \} \cdot \underline{P}^{-1}
\end{aligned}$$

La matrice de rigidité élémentaire est de dimension  $(8 \times 8)$  puisque chaque maille a quatre noeuds.



## Annexe E

# Calcul de la matrice élémentaire de force totale

### E.1 Terme faisant intervenir la mémoire

Dans ce cas, il s'agit de calculer les termes:

$$\text{E.14} \quad 4 \pi S \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t \underline{\kappa} \cdot \underline{\Lambda} y(\xi, \eta) d\eta d\xi$$

Soit:

$$\text{E.15} \quad 4 \pi S \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} {}^t \underline{P}^{-1} \\ {}^t \underline{P}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (a {}^t \langle \underline{N}_1 \rangle + a' {}^t \langle \underline{N}_2 \rangle) \cdot y \cdot \Lambda_1 \\ + (b {}^t \langle \underline{N}_1 \rangle + b' {}^t \langle \underline{N}_2 \rangle) \cdot y \cdot \Lambda_4 \\ (b {}^t \langle \underline{N}_1 \rangle + b' {}^t \langle \underline{N}_2 \rangle) \cdot y \cdot \Lambda_2 + {}^t \langle \underline{N} \rangle \cdot \Lambda_3 \\ + (a {}^t \langle \underline{N}_1 \rangle + a' {}^t \langle \underline{N}_2 \rangle) \cdot y \cdot \Lambda_5 \end{pmatrix} d\eta d\xi$$

On a alors:

$$\text{E.16} \quad \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t \langle \underline{N}_1 \rangle \cdot y(\xi, \eta) d\eta d\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} (y_1 + y_2 + y_3) \\ 0 \\ \frac{1}{24} (3y_1 + 5y_2 + 4y_3) \end{pmatrix}$$

$$\text{E.17} \quad \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t \langle \underline{N}_2 \rangle \cdot y(\xi, \eta) d\eta d\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6} (y_1 + y_2 + y_3) \\ \frac{1}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) \end{pmatrix}$$

$$\text{E.18} \quad \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t\langle \underline{N} \rangle d\eta \, d\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Ainsi, le terme de force associé s'écrit:

$$\underline{\mathcal{F}}^0 = 4 \pi S \begin{pmatrix} \underline{\tilde{\mathcal{F}}}^1 \\ \underline{\tilde{\mathcal{F}}}^2 \end{pmatrix}$$

avec:

$$\underline{\tilde{\mathcal{F}}}^1 = {}^t\underline{P}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a\Lambda_1+b\Lambda_4}{6} (y_1 + y_2 + y_3) \\ \frac{a'\Lambda_1+b'\Lambda_4}{6} (y_1 + y_2 + y_3) \\ \frac{a\Lambda_1+b\Lambda_4}{24} (3y_1 + 5y_2 + 4y_3) + \frac{a'\Lambda_1+b'\Lambda_4}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\tilde{\mathcal{F}}}^2 = {}^t\underline{P}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\Lambda_3}{2} \\ \frac{a\Lambda_5+b\Lambda_2}{6} (y_1 + y_2 + y_3) + \frac{\Lambda_3}{6} \\ \frac{a'\Lambda_5+b'\Lambda_2}{6} (y_1 + y_2 + y_3) + \frac{\Lambda_3}{6} \\ \frac{a\Lambda_5+b\Lambda_2}{24} (3y_1 + 5y_2 + 4y_3) + \frac{a'\Lambda_5+b'\Lambda_2}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) + \frac{\Lambda_3}{8} \end{pmatrix}$$

## E.2 Terme de force volumique

Pour sa part, le terme de force volumique s'écrit:

$$\text{E.19} \quad 4\pi S \, {}^t\underline{P}^{-1} \cdot \left\{ \int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t\langle \underline{N} \rangle y(\xi, \eta) d\eta \, d\xi \right\} \cdot \underline{\mathbf{f}}$$

soit:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} {}^t\langle \underline{N} \rangle y(\xi, \eta) d\eta d\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} (y_1 + y_2 + y_3) \\ \frac{1}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) \\ \frac{1}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) \\ \frac{1}{120} (3y_1 + 8y_2 + 4y_3) \end{pmatrix}$$

Si on note  $\underline{\mathbf{f}}^H$  (resp.  $\underline{\mathbf{f}}^V$ ) la composante horizontale (resp. verticale) du vecteur force volumique, alors le terme de force volumique vaut:

$$\underline{\mathcal{F}}^0 = 4 \pi S \begin{pmatrix} \underline{\tilde{\mathcal{F}}}^3 \\ \underline{\tilde{\mathcal{F}}}^4 \end{pmatrix}$$

avec:

$$\underline{\tilde{\mathcal{F}}}^3 = {}^t\underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{f}_1^H}{6} (y_1 + y_2 + y_3) \\ \frac{\mathbf{f}_2^H}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) \\ \frac{\mathbf{f}_3^H}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) \\ \frac{\mathbf{f}_4^H}{120} (3y_1 + 8y_2 + 4y_3) \end{pmatrix}$$

et

$$\underline{\tilde{\mathcal{F}}}^4 = {}^t\underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{f}_1^V}{6} (y_1 + y_2 + y_3) \\ \frac{\mathbf{f}_2^V}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) \\ \frac{\mathbf{f}_3^V}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) \\ \frac{\mathbf{f}_4^V}{120} (3y_1 + 8y_2 + 4y_3) \end{pmatrix}$$

où  $(\mathbf{f}_i^\alpha)_{i=1\dots 4}^{\alpha=H,V}$  est la composante  $\alpha$  de la force volumique appliquée au noeud  $i$ .

### E.3 Matrice de force élémentaire

Compte tenu de ce qui précède, la matrice de force élémentaire s'écrit:

$$\underline{\mathcal{F}}^{el} = \underline{\mathcal{F}}^0 - \underline{\mathcal{F}}^0$$

soit:

$$\text{E.20} \quad \underline{\mathcal{F}}^{el} = \begin{pmatrix} {}^t \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{f}_1^H}{6} (y_1 + y_2 + y_3) \\ \frac{\mathbf{f}_2^H}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) - \frac{a\Lambda_1 + b\Lambda_4}{6} (y_1 + y_2 + y_3) \\ \frac{\mathbf{f}_3^H}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) - \frac{a'\Lambda_1 + b'\Lambda_4}{6} (y_1 + y_2 + y_3) \\ \frac{\mathbf{f}_4^H}{120} (3y_1 + 8y_2 + 4y_3) - \frac{a\Lambda_1 + b\Lambda_4}{24} (3y_1 + 5y_2 + 4y_3) \\ \quad + \frac{a'\Lambda_1 + b'\Lambda_4}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) \end{pmatrix} \\ {}^t \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{f}_1^V}{6} (y_1 + y_2 + y_3) - \frac{\Lambda_3}{2} \\ \frac{\mathbf{f}_2^V}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) - \frac{a\Lambda_5 + b\Lambda_2}{6} (y_1 + y_2 + y_3) - \frac{\Lambda_3}{6} \\ \frac{\mathbf{f}_3^V}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) - \frac{a'\Lambda_5 + b'\Lambda_2}{6} (y_1 + y_2 + y_3) - \frac{\Lambda_3}{6} \\ \frac{\mathbf{f}_4^V}{120} (3y_1 + 8y_2 + 4y_3) - \frac{a\Lambda_5 + b\Lambda_2}{24} (3y_1 + 5y_2 + 4y_3) \\ \quad - \frac{a'\Lambda_5 + b'\Lambda_2}{24} (y_1 + 2y_2 + y_3) - \frac{\Lambda_3}{8} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Il s'agit bien d'un vecteur à 8 composantes, les quatre premières correspondant aux déplacements horizontaux des quatre noeuds de la maille et les quatre dernières aux déplacements verticaux de ces mêmes noeuds.



## Bibliographie

- [Adams, 1975] ADAMS R. A., 1975, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York.
- [Alaoui Soulimani, 1993] ALAOUI SOULIMANI A., 1993, Une méthode énergétique de modélisation de la viscoélasticité non linéaire en grandes déformations, *Thèse*, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- [Bernstein *et al.*, 1963] BERNSTEIN B., KEARSLEY E. A., ZAPAS L. J., 1963, A study of stress relaxation with finite strain, *Transactions of the society of rheology*, **7**, pp 391-410.
- [Biot, 1955] BIOT M. A., 1955 Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity, *Phys. Rev.*, **97**, pp 1463-1469.
- [Breuer & Onat, 1964] BREUER S., ONAT E. T., 1964, On the determination of free energy in linear viscoelastic solids *ZAMP*, **15**, pp 184-191.
- [Brockman, 1986] BROCKMAN R. A., 1986 On the use of Blatz-Ko constitutive model in nonlinear finite element analysis, *Comput. Struct.*, **24**, pp 607-611.
- [Brown, 1976] BROWN R. L., 1976, A thermodynamic study of materials representable by integral expansions, *Int. J. Eng. Sci.*, **14**, pp 1033-1046.
- [Brun, 1965] BRUN L., 1965, Sur deux expressions, analogues à la formule de Clapeyron, donnant l'énergie libre et la puissance dissipée pour un corps viscoélastique, *C. R. Acad. Sci.*, **261**, pp 41-44.
- [Brun, 1967] BRUN L., 1967, Thermodynamique et viscoélasticité, *Cahiers du Groupe Français de Rhéologie*, **1**, pp 191-202.
- [Brun, 1969] BRUN L., 1969, Méthodes énergétiques pour les systèmes évolutifs linéaires, *J. Mécanique*, **8**, pp 125-166.
- [Chang *et al.*, 1991] CHANG T. Y. P., SALEEB A. F., LI G., 1991, Large strain analysis of rubber-like materials based on a perturbed Lagrangian variational principle, *Computational Mechanics*, **8**, pp 221-233.

- [Christensen, 1980] CHRISTENSEN R. M., 1980, A nonlinear theory of viscoelasticity for application to elastomers, *Transactions of the ASME*, **47**, pp 762-768.
- [Christensen, 1968] CHRISTENSEN R. M., 1968, Variational and minimum theorems for the linear dynam theory of viscoelasticity, *ZAMP*, **19**, pp 233-243.
- [Coleman & Noll, 1961a] COLEMAN B. D., NOLL W., 1961, An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics, *Mod. Phys.*, **33**, pp 239-249.
- [Coleman & Noll, 1961b] COLEMAN B. D., NOLL W., 1961, Fondations of linear viscoelasticity, *Reviews of Modern Physics*, **17**, N°2, pp 239-249.
- [Coleman, 1964] COLEMAN B. D., 1964, An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **17**, pp 1-46.
- [Dautray & Lions, 1990] DAUTRAY R., LIONS J.-L., 1990, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technologie, Volume 2: Functional and variational methods*, Editions MIR, Moscou.
- [Ditkine & Proudnikov, 1979] DITKINE V., PROUDNIKOV A., 1979, *Calcul opérationnel*, Springer-Verlag, Berlin.
- [Ehrlacher & Fédelich, 1989] EHRLACHER A., FÉDELICH B., 1989, Sur un principe de minimum concernant des matériaux à comportement indépendant du temps physique, *C.R.A.S. t308 série II*, pp 1391-1394.
- [Ericksen, 1953] ERICKSEN J. L., 1953, On the propagation of waves in isotropic incompressible perfectly elastic materials, *J. Rat. Mech. Anal.*, **2**, pp 329-337.
- [Ericksen, 1954] ERICKSEN J. L., 1954, Deformation possible in every isotropic incompressible, perfectly elastic body, *ZAMP*, **5**, pp 466-489.
- [Eringen, 1967] ERINGEN P., 1967, *Mechanics of Continua*, J. Wiley, New York.
- [Fabrizio & Morro, 1988] FABRIZIO M., MORRO A., 1988, Viscoelastic relaxation functions compatible with thermodynamics, *Journal of Elasticity*, **19**, pp 63-75.
- [Fabrizio et al., 1989] FABRIZIO M., GIORGI C., MORRO A., 1989, Minimum principles, convexity, and thermodynamics in viscoelasticity, *Cotinum Mechanics and Thermodynamics*, **1**, pp 197-211.

- [Fédelich, 1990] FÉDELICH B., 1990, Trajets d'équilibre des systèmes mécaniques dissipatifs à comportement indépendant du temps physique, *Thèse*, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- [Fortin & Glowinski, 1982] FORTIN M., GLOWINSKI R., 1982, *Méthodes de Lagrangien Augmenté Lagrangian. Application à la résolution de problèmes aux limites* Dunod-Bordas, Paris.
- [Fréchet, 1910] FRÉCHET M., 1910, Sur les fonctionnelles continues, *Ann. Sci.*, **27**, pp 193-216.
- [de Gennes, 1979] DE GENNES P. G., 1979, *Scaling concepts in polymer physics*, Cornell University Press, Ithaca, New York.
- [Germain, 1973] GERMAIN P., 1973, *Mécanique des Milieux Continus*, Masson, Paris.
- [Germain & Muller, 1986] GERMAIN P., MULLER P., 1986, *Introduction à la Mécanique des Milieux Continus*, 2<sup>ème</sup> édition, Masson, Paris.
- [Glowinski, 1984] GLOWINSKI R., 1984, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems* Springer-Verlag, Berlin, New York.
- [Glowinski & Le Tallec, 1982] GLOWINSKI R., LE TALLEC P., 1982, Numerical Solutions of Problems in Incompressible Finite Elasticity by Augmented Lagrangian Methods. I. Two-dimensional and Axisymmetric Problems, *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, **42**, pp 400-429.
- [Glowinski & Le Tallec, 1989] GLOWINSKI R., LE TALLEC P., 1989, *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics* S.I.A.M. Studies in Applied Mathematics.
- [Gradowczyk, 1969] GRADOWCZYK M. H., 1969, On the accuracy of the Green-Rivlin representation for viscoelastic materials, *Int. J. Solids Structures*, **5**, pp 873-877.
- [Green & Tobolsky, 1946] GREEN M. S., TOBOLSKY A. V., 1946 A new approach to the theory of relaxing polymeric media, *J. Phys. Chem.*, **14**, pp 80-92.
- [Green & Rivlin, 1957] GREEN A. E., RIVLIN S., 1957, The mechanics of nonlinear materials with memory; Part I, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **1**, pp 1-21.
- [Green & Adkins, 1972] GREEN A. E., ADKINS J. E., 1972 *Large elastic deformations*, 2<sup>nd</sup> edn., Clarendon Press, Oxford.
- [Gurtin & Herrera, 1965] GURTIN M. E., HERRERA I., 1965, On dissipation inequalities and linear viscoelasticity, *Quarterly of Appl. Math.*, **23**, pp 235.

- [Gurtin & Sternberg, 1962] GURTIN M. E., STERNBERG E., 1962, On the linear theory of viscoelasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **11**, pp 291-356.
- [Gurtin, 1963<sub>a</sub>] GURTIN M. E., 1963, Variational principles in the linear theory of viscoelasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **13**, pp 179-191.
- [Gurtin, 1963<sub>b</sub>] GURTIN M. E., 1963, Variational principles for linear elastodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **16**, pp 34-50.
- [Gurtin, 1964] GURTIN M. E., 1964, Variational principles for linear initial-value problems, *Quart. Appl. Math.*, **22**, N°3, pp 252-256.
- [Hart-Smith, 1966] HART-SMITH L. J., 1966, Elasticity parameters for finite deformation of rubber-like materials, *ZAMP*, **17**, pp 608-625.
- [Hart-Smith & Crisp, 1967] HART-SMITH L. J., CRISP J. D. C., 1967, Large elastic deformations of thin rubber membranes, *Int. J. Eng. Sci.*, **5**, pp 1-24.
- [Hassani *et al.*, 1997] HASSANI S., ALAOUI SOULIMANI A., EHRLACHER A., 1997, A non linear viscoelastic model: the pseudo-linear model, *European Journal of Mechanics*, à paraître.
- [Hausler & Sayir, 1995] HAUSLER K., SAYIR M. B., 1995, Nonlinear viscoelastic response of carbon black reinforced rubber derived from moderately large deformations in torsion *J. Mech. Phys. Solids*, **43**, N°2, pp 295-318.
- [Hill, 1968] HILL R., 1968, On constitutive inequalities for simple materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **16**, pp 229-315
- [Hestenes, 1969] HESTENES M., 1969, Multiplier and gradient methods, *J. Opt. Theory Appl.*, **4**, pp 303-320
- [Huet, 1972] HUET C., 1972, Sur une application du calcul symbolique à la viscoélasticité non linéaire, *C. R. Acad. Sciences*, **A-275**, pp 793-796
- [Huet, 1974] HUET C., 1974, Viscoélasticité non linéaire et calcul symbolique, *Cahiers du Groupe français de rhéologie*, **3**, pp 150-159
- [Huet, 1985] HUET C., 1985, Relations between creep and relaxation functions in nonlinear viscoelasticity with or without aging, *Journal of rheology*, **29**, pp 245-257
- [Huet, 1992] HUET C., 1992, Minimum theorems for viscoelasticity, *European Journal of Mechanics*, **11**, pp 653-684
- [Hu Hai-Chang, 1954] HU HAI-CHANG, 1954, Some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity, *Acta Physica Sinica*, **X**, N°3, pp 259-290

- [Jankovich *et al.*, 1981] JANKOVICH E., LEBLANC F., DURANT M., 1981 A finite element method for the analysis of rubber parts, experimental and analytical assessment, *Computers and structures*, **14**, N° 5-6, pp 385-391.
- [Johnson *et al.*, 1991<sub>a</sub>] JOHNSON A. R., QUIGLEY C. J., 1991 A viscohyperelastic Maxwell model for rubber viscoelasticity, *Rubber chemistry and technology*, **65**, pp 137-153.
- [Johnson *et al.*, 1991<sub>b</sub>] JOHNSON A. R., QUIGLEY C. J., CAVALLARO C., WEIGHT K. D., 1991, in "The mathematics of finite elements and applications VII, MAFELAP 1990", J. R. Whiteman Ed., Academic Press Limited, London.
- [Johnson *et al.*, 1991<sub>c</sub>] JOHNSON A. R., QUIGLEY C. J., WEIGHT K. D., CAVALLARO C., COX D. L., 1991, in "Proceedings of the eighth army conference on applied mathematics and computing 1990". F. Dressel Ed., US Army Research Office, NTIS.
- [Knowles, 1960] KNOWLES J. A., 1960, Large amplitude oscillations of a tube of incompressible elastic materials, *Q. Appl. Math.*, **18**, pp 71-77.
- [Leaderman, 1962] LEADERMAN H., 1962, *Tans. Soc. Rheol.*, **6**, pp 361
- [Leitman, 1966] LEITMAN M. J., 1966, Variational principles in the linear dynamic theory of viscoelasticity, *Quart. Appl. Math.*, **24**, N°1, pp 37-46.
- [Le Tallec, 1982] LE TALLEC P., 1982, Existence and approximation results for nonlinear mixed problems: application to incompressible finite elasticity, *Numer. Math.*, **38**, pp 365-382.
- [Le Tallec & Oden, 1981] LE TALLEC P., ODEN J. T., 1981, Existence and characterization of hydrostatic pressure in finite deformations of incompressible elastic bodies, *J. Elasticity*, **11**.
- [Le Tallec & Vidrascu, 1984] LE TALLEC P., VIDRASCU M., 1984, Une méthode numérique pour les problèmes d'équilibre de corps hyperélastiques compressibles en grandes déformations, *Numer. Math.*, **43**, pp 199-224.
- [Le Tallec, 1990] LE TALLEC P., 1990, *Numerical Analysis of Viscoelastic Problems*. Masson, Paris.
- [Lockett, 1965] LOCKETT F. J., 1965, *Int. J. Eng. Sci.*, **3**, pp 59-75.
- [Lockett, 1972] LOCKETT F. J., 1972, *Nonlinear Viscoelastic Solids*, Academic Press, London.

- [Lodge, 1968] LODGE A. S., 1968, Constitutive equations from molecular network theories for polymer solutions, *Rheologica Acta*, band 7, help 4, pp 379-392.
- [Lubliner, 1985] LUBLINER J., 1985, A model of rubber viscoelasticity, *Mech. Res. Comm.*, 12, pp 93-99.
- [Mandel, 1977] MANDEL J., 1977, *Colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie publié dans les cahiers du G.F.R.*.
- [Mandel, 1966] MANDEL J., 1966, *Cours de Mécanique des milieux continus, Tome II, Annexe XXI, Viscoélasticité*, Gauthier-Villars, Paris.
- [McGuirt & Lianis, 1970] MCGUIRT C. W., LIANIS G., 1970, *Trans. Soc. Rheol.*, 14, pp 117
- [Morman, 1988] MORMAN K. N., 1988, An adaptation of finite linear viscoelasticity theory of rubber-like viscoelasticity by use of a generalized strain measure, *Rheologica Acta*, 27, pp 3-14.
- [Nakamura, 1979] NAKAMURA K., 1979, Minimum principles in the linear theory of viscoelasticity, *Journal of the Physical Society of Japan*, 47, N°4, pp 1299-1304.
- [Nakamura & Horikawa, 1979] NAKAMURA K., HORIKAWA A., 1979, Variational and minimum principles in the linear theory of viscoelasticity, *Journal of the Physical Society of Japan*, 47, N°4, pp 469-475.
- [Nemat-Nasser & Mehrabadi, 1987] NEMAT-NASSER S., MEHRABADI M. M., 1987, Some basic kinematical relations for finite deformations of continua, *Mechanics of Materials*, 6, pp 127-138.
- [Noll, 1958] NOLL W., 1958, A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2, pp 197-226.
- [Oden, 1972] ODEN J. T., 1972, *Finite elements of nonlinear continua*, McGraw-Hill, New York.
- [Ogden, 1972<sub>a</sub>] OGDEN R. W., 1972, Large deformation isotropic elasticity - On the correlation of theory and experiment for compressible rubber-like solids, *Proc. R. Soc. London Ser. A* 328, pp 567-583.
- [Ogden, 1972<sub>b</sub>] OGDEN R. W., 1972, Large deformation isotropic elasticity - On the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solids, *Proc. R. Soc. London Ser. A* 326, pp 565-584.
- [Ogden, 1976] OGDEN R. W., 1976, Volume changes associated with the deformation of rubber-like solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 24, pp 323-338.

- [Ogden, 1978] OGDEN R. W., 1978, Nearly isochoric elastic deformations: application to rubber-like materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **26**, pp 37-57.
- [Pipkin, 1964] PIPKIN A. C., 1964, Small finite deformations of viscoelastic solids, *Reviews of Modern Physics*, pp 1034-1041.
- [Pipkin & Rivlin, 1961] PIPKIN A. C., RIVLIN R. S., 1961, Small deformations superposed on large deformations in materials with fading memory, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **8**, pp 297-308.
- [Poli & Delerue, 1954] POLI L., DELERUE P., 1954, *Le calcul symbligue à deux variables et ses applications*, Mém. Sc. Math., CXXVII, Gauthier-Villars, Paris.
- [Powell, 1969] POWELL M. J. D., 1969, *A method for nonlinear constraints in minimization problems*, in Optimization, Chap. 19, R. Fletcher, ed., Academic Press, New York.
- [Reddy, 1976] REDDY J. N., 1976, Modified Gurtin's variational principles in the linear dynamic theory of viscoelasticity, *Int. J. Solids Structures*, **12**, pp 227-235.
- [Rivlin, 1951] RIVLIN R. S., 1951, Large elastic deformations of isotropic materials; Part III: Experiments on the deformation of rubber, *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, **243**, pp 251-288.
- [Rockafellar, 1973] ROCKAFELLAR R. T., 1973, A dual approach to solving nonlinear programming problems by unconstrained optimization, *Mathematical Programming*, **5**, pp 354-373.
- [Ruas, 1981] RUAS V., 1981, A class of asymmetric simplicial finite element method for solving finite incompressible elasticity problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **27** (3), pp 319-343.
- [Saleeb *et al.*, 1992] SALEEB A. F., CHANG T. Y. P., ARNOLD S. M., 1992, On the development of explicit robust schemes for implementation of a class of hyperelastic models in large-strain analysis of rubbers, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, pp 1237-1249.
- [Salençon, 1983] SALENÇON J., 1983, *Cours de calcul des structures anélastiques: Viscoélasticité*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [Salençon, 1989] SALENÇON J., 1989, *Mécanique des milieux continus, Tome I: Concepts généraux*, Editions de l'Ecole Polytechnique.
- [Salençon, 1988] SALENÇON J., 1988, *Mécanique des milieux continus, Tome II: Elasticité - Milieux curvilignes*, Editions de l'Ecole Polytechnique.

- [Schapery, 1966] SCHAPERY R. A., 1966, A theory of nonlinear viscoelasticity based on irreversible thermodynamics, *Proc. 5<sup>th</sup> National Congress of Applied Mechanics (ASME, New York)*, pp 511-530.
- [Schapery, 1969] SCHAPERY R. A., 1969, *Polym. Eng. Sci.*, **9**, pp 295.
- [Serrin, 1959] SERRIN J., 1959, Mathematical principles of classical fluid mechanics in *Encyclopedia of Physics*, edited by S. Flügge, (Springer-Verlag, Berlin . Heidelberg . New York), Volume VIII/1.
- [Seth, 1964] SETH B. R., 1964, *Generalized strain measure with application to physical problems*, in Reiner M. and Abir D. (eds), *Second order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics*, Pergamon, Oxford pp162-172.
- [Sewell, 1987] SEWELL M. J., 1987, *Maximum and minimum principles, a unified approach, with applications*, Cambridge University Press.
- [Sidoroff, 1974] SIDOROFF F., 1974, Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire *Journal de Mécanique*, **13** N°4, pp 679-713,
- [Sidoroff, 1975<sub>a</sub>] SIDOROFF F., 1975, Variables internes en viscoélasticité, I. Variables internes scalaires et tensorielles, *Journal de Mécanique*, **14** N°3, pp 545-565,
- [Sidoroff, 1975<sub>b</sub>] SIDOROFF F., 1975, Variables internes en viscoélasticité, II. Milieux avec configuration intermédiaire, *Journal de Mécanique*, **14** N°4, pp 571-595,
- [Sidoroff, 1976] SIDOROFF F., 1976, Variables internes en viscoélasticité et plasticité, *Thèse*, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [Signorini, 1955] SIGNORINI J. C., 1955, Trasformazioni termoelastiche finite, Memoria 3<sup>a</sup>, Solidi incompressibili, *Ann. di Mat. Pur. Appl.*, **39**, pp 147-201.
- [Simo, 1987] SIMO J. C., 1987, On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects, *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **60**, pp 153-173.
- [Spencer & Rivlin, 1959] SPENCER A. J. M., RIVLIN R. S., 1959, Further results in the theory of matrix polynomials, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **4**, pp 214-230.
- [Staverman & Schwartzl, 1952<sub>a</sub>] STAVERMAN A. J. M., SCHWARTZL P., 1952, *Proc. Acad. Sci., The Netherlands*, **55**, pp 474-485.
- [Staverman & Schwartzl, 1952<sub>b</sub>] STAVERMAN A. J. M., SCHWARTZL P., 1952, *Proc. Kowink. Neder.*, **B-55**, pp 486-492.



- [Treloar, 1975] TRELOAR R. L. G., 1975, *The physics of rubber elasticity*, 3<sup>rd</sup> edn., Oxford University Press.
- [Truesdell & Noll, 1965] TRUESDELL C., NOLL W., 1965, The non-linear fields theories of mechanics in *Encyclopedia of Physics*, edited by S. Flügge, (Springer-Verlag, Berlin . Heidelberg . New York), Volume III/3.
- [Ward, 1985] WARD I. M., 1985, *Mechanical properties of solid polymers*, 2<sup>nd</sup> edn., John Wiley & Sons.
- [Weber, 1968] WEBER J. D., 1968, Sur les propriétés d'une classe de corps viscoélastiques non linéaires à paramètres cachés *C. R. Acad. Sci.*, **267**, série A, pp 565.
- [Weber, 1974] WEBER J. D., 1974, Hypothèse des variables internes et viscoélasticité non linéaire: étude du cas particulier d'une seule variable interne tensorielle, *IUTAM, Mechanics of Viscoelastic Media and Bodies, Symposium Gothenburg - Sweden*, pp 147-152, edited by Jan Hult, (Springer-Verlag, Berlin . Heidelberg . New York)
- [Yamamoto, 1956] YAMAMOTO M., 1956, The viscoelastic properties of network structures- 1. General formalism, *Journal of the physical society of Japan*, **11**, N° 4, pp 413-421.
- [Yamamoto, 1957] YAMAMOTO M., 1957, The viscoelastic properties of network structures- 2. Structural viscosity, *Journal of the physical society of Japan*, **12**, N° 10, pp 1148-1158.
- [Yamamoto, 1958] YAMAMOTO M., 1958, The viscoelastic properties of network structures- 3. Normal stress effect (Weissenberg effect), *Journal of the physical society of Japan*, **13**, N° 10, pp 1200-1211.